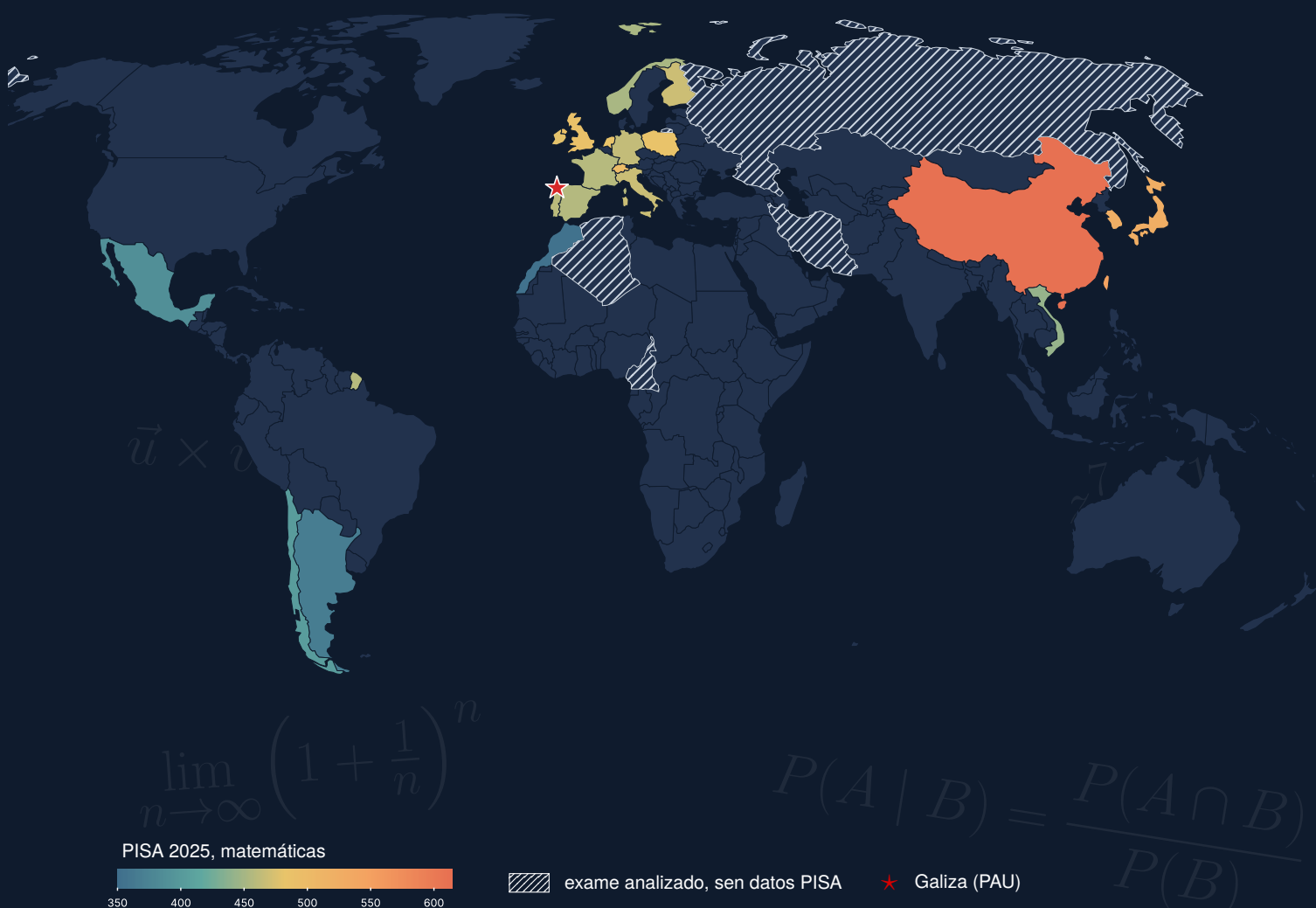


Matemáticas para entrar na universidade

Exames de acceso de 26 países, Andalucía e Catalunya, traducidos ao galego e resoltos, ordenados segundo os resultados en matemáticas do informe PISA 2025

Iván Area Carracedo



Índice

Proemio	1
Os países no mapa	3
Táboa resumo, segundo os resultados en matemáticas de PISA	4
Dificultade relativa dos exames analizados	5
Matemáticas en PISA e dificultade da PAU: hai correlación?	6
Sobre as fontes	6
 Países segundo os resultados en matemáticas de PISA 2025	 7
1 China	9
2 Taiwán	18
3 Xapón	27
4 Corea do Sur	33
5 Suíza	45
6 Reino Unido	52
7 Polonia	62
8 Países Baixos	68
9 Irlanda	78
10 España (Catalunya)	97
11 Finlandia	103
12 Italia	111
13 Alemaña	119
14 Portugal	137
15 Francia	146
16 Noruega	155
17 Vietnam	163
18 España (Andalucía)	172

19 Chile	177
20 México	178
21 Arxentina	181
22 Marrocos	185
 Países sen datos en PISA 2025	 197
23 Rusia	199
24 Irán	205
25 Alxeria	217
26 Camerún	225

Proemio

O 8 de setembro de 2026 viu a luz un novo informe PISA, o correspondente ao ciclo de 2025, no que as matemáticas foron outra vez a competencia principal e no que participaron máis de 760 000 estudantes de quince anos de 91 países e economías. Como cada vez que se publica, os titulares enchéronse de clasificacións, subidas e baixadas. Sen entrar a valorar quen fai o informe nin que intereses pode haber detrás, a lectura destes resultados suscitoume unha dúbida sinxela de formular e moi difícil de responder:

Existirá algunha correlación entre os resultados en matemáticas do informe PISA e a dificultade das probas de acceso á universidade nos distintos países?

Obviamente iso é algo difícil de probar. PISA avalía alumnado de quince anos, mentres que as probas de acceso (PAU, selectividade...) as fai o alumnado que remata o ensino secundario dous ou tres anos despois, e só unha parte del. Ademais, todo é relativo cando falamos da dificultade dunha proba: depende do currículo de cada país, do tempo dispoñíbel, de se se permite ou non a calculadora, de se hai optatividade, da porcentaxe de alumnado que se presenta, do peso que ten a proba na nota final e, sobre todo, do contexto do alumnado que a fai. Unha proba aparentemente doada pode ser moi selectiva se a nota de corte é alta, e unha proba moi difícil pode estar pensada para que só a resolva por completo unha minoría.

Por iso, no lugar de conxectar, simplemente pensei en elaborar unha relación de países ordenados segundo os seus resultados en matemáticas no informe PISA 2025, xunto cos seus correspondentes exames de acceso á universidade, no caso de existiren. Escollín en cada país a proba máis próxima á materia de **Matemáticas II** de 2.º de Bacharelato en Galiza e, sempre que foi posíbel, o exame da convocatoria principal máis recente (2025 ou 2026). Engadí tamén algúns países que non participaron en PISA 2025 pero que teñen tradicións matemáticas ou sistemas de acceso de interese (Rusia, Irán, Alxeria e Camerún); aparecen ao final, nun bloque propio. Para ter referencias próximas, incluí tamén dous exames de Matemáticas II de 2026 doutras comunidades: o da PAU de Andalucía e o da PAU de Catalunya. Este último xerou bastante polémica: o alumnado queixouse da súa dificultade. Parecía obrigado velo e comparalo co galego.

As comunidades autónomas dentro da orde dos resultados en matemáticas. Os rankings de PISA publicanse por países, pero o informe español ofrece tamén os resultados por comunidades autónomas. Para situar cada comunidade empreguei a súa puntuación media, non a posición que ocupa nas clasificacións: as puntuacións son estimacións cun erro de mostraxe (maior nas mostrax rexionais), de xeito que diferenzas de poucos puntos non son estatisticamente significativas e comunidades ou países en postos distintos, e con valores distintos, teñen en realidade o mesmo resultado. Así, Galiza (466 puntos), Catalunya (474) e Andalucía (442) aparecen intercaladas entre os países no lugar que lles corresponde polo seu valor. O dato de Catalunya publicouse á parte e a OCDE considéranlo non comparábel, porque se excluíu o 23 % da mostra (o máximo admitido é o 5 %). A táboa seguinte recolle os valores de todas as comunidades.

Madrid	477	Castela-A Mancha	462	Murcia	447
Catalunya*	474	A Ríoxa	462	Canarias	442
Castela e León	472	Aragón	462	Andalucía	442
Cantabria	470	Navarra	462	C. Valenciana	435
Asturias	469	País Vasco	460	Ceuta	405
Galiza	466	Estremadura	454	Melilla	395
		Illes Balears	449	<i>España</i>	<i>457</i>

PISA 2025, matemáticas, puntuación media por comunidade autónoma. *Dato non comparábel (exclusión do 23 % da mostra).

Que hai en cada capítulo. Para cada país inclúese:

- unha ficha coa puntuación en matemáticas en PISA 2025, o nome orixinal da proba, o curso e a convocatoria en que se fixo, a duración, o uso de calculadora, a estrutura e un breve contexto sobre o sistema de acceso;
- o exame completo traducido ao galego (instrucións, enunciados, opcións e puntuacións);
- a ligazón ao exame orixinal, por se algunha persoa ten curiosidade por velo ou dubida da tradución;
- a resolución completa de todos os exercicios.

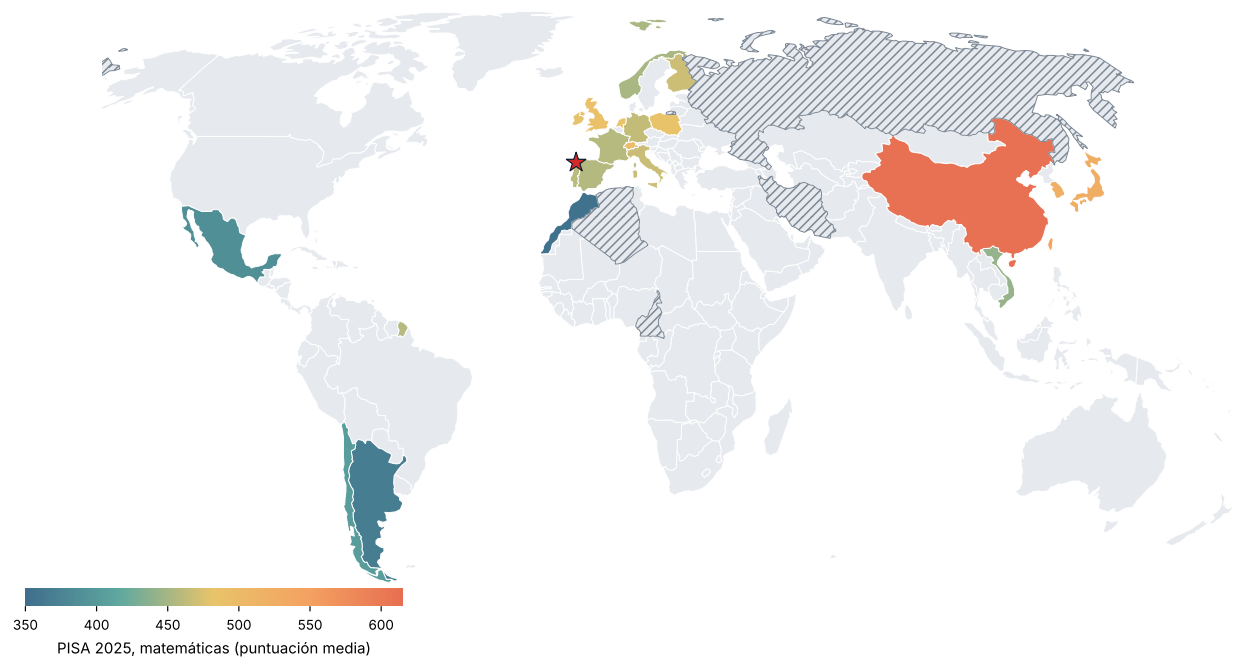
Durante moitos anos fun coleccionando exames de “selectividade” de moitos países do mundo. Cando por razóns de traballo me despracei a congresos ou tiveren estudantes de distintos países, tentei preguntar como era a súa selectividade e conseguir exames traducidos ao inglés. Desta volta, coas novas ferramentas de intelixencia artificial xerativa é moito máis doado traducir e xa non cómpre pedir favores. A escolla dos países dos exames é puramente polo interese persoal e a propia historia de ter exames de anos anteriores, pero non se pretende completitude. Os resultados comprobáronse con cálculo simbólico e numérico, pero recoméndase cotexar co orixinal antes de usar calquera exercicio na aula. As notas do tradutor, en cursiva e entre corchetes, sinalan as figuras redebuxadas ou só descritas, as fórmulas restituídas e as dúbidas de lectura.

A dificultade, sempre relativa. Ao comezo de cada capítulo indícase unha *dificultade relativa estimada* nunha escala de 1 a 10, tomando como referencia fixa a PAU de Matemáticas II de Galiza (= 5). A valoración combina catro aspectos: a amplitude e profundidade dos contidos, a dificultade técnica dos cálculos, o grao de razoamento e demostración esixido e a carga de traballo en relación co tempo dispoñíbel. É unha valoración relativa aos exames aquí analizados, non un xuízo absoluto: depende, como se dixo, do contexto do alumnado que fixo cada unha destas probas. A táboa e o gráfico das páxinas seguintes resumen a información.

Ao final desta parte introdutoria inclúese unha breve análise descritiva da relación entre a puntuación en matemáticas de PISA e a dificultade estimada das probas, sen máis pretensión que poñer os números á vista para quen queira mirar e pensar por si mesmo.

Boa lectura!

Os países no mapa



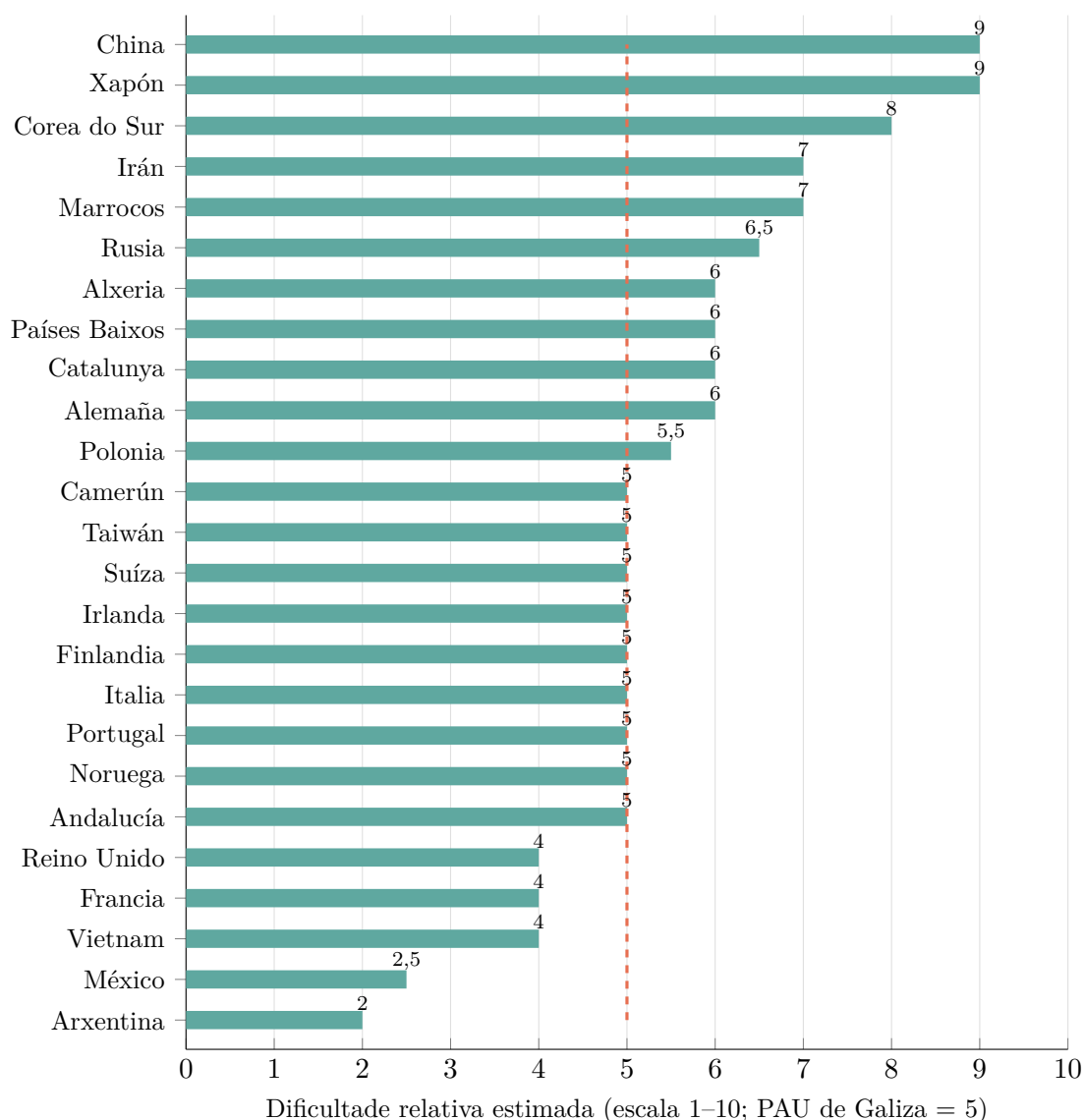
Cor: puntuación media en matemáticas en PISA 2025 dos países con exame analizado (e España como referencia). Raiado: países con exame analizado que non participaron en PISA 2025. A estrela vermella é Galiza. No caso de China, a puntuación corresponde só á mostra de Pequín, Xangai, Jiangsu e Zhejiang.

Táboa resumo, segundo os resultados en matemáticas de PISA

País	PISA mat.	Proba de acceso	Ano	Dificultade (1–10)	Posto (de 25)
China	612	Gaokao, modelo I	2026	9	1
Taiwán	546	Proba por materias, Matemáticas A	2026	5	12
Xapón	525	Univ. de Tokio (ciencias)	2026	9	1
Corea do Sur	522	Suneung (CSAT), Cálculo	2024	8	3
Suíza	499	Maturité (Lycée de Porrentruy)	2026	5	12
Reino Unido	488	A-level AQA, Paper 1	2025	4	21
Polonia	484	Matura, nivel ampliado	2026	5,5	11
Países Baixos	483	VWO wiskunde B	2026	6	7
Irlanda	480	Leaving Certificate HL	2026	5	12
Catalunya	474*	PAU Catalunya, Matemàtiques	2026	6	7
Finlandia	469	Ylioppilastutkinto, pitkä	2026	5	12
Italia	468	Esame di Stato, Liceo Scientifico	2025	5	12
Galiza	466	PAU Galiza, Matemáticas II (referencia)	2026	5	12
Alemaña	464	Abitur Baviera (nivel elevado)	2026	6	7
Portugal	460	Exame Nacional Matemática A	2025	5	12
Francia	458	Bac, spécialité Maths	2026	4	21
Noruega	452	Matematikk R2	2026	5	12
Vietnam	443	Graduación THPT, Toán	2025	4	21
Andalucía	442	PAU Andalucía, Matemáticas II	2026	5	12
Chile	403	PAES, Competencia Matemática 2	2026	—	—
México	388	EXANI-II (ejemplos)	2025	2,5	24
Arxentina	367	Ingreso UNS (non equivalente)	2025	2	25
Marrocos	355	Bac, Sciences Mathématiques	2026	7	4
<i>Países que non participaron en PISA 2025</i>					
Rusia	—	EGE, nivel de perfil	2026	6,5	6
Irán	—	Konkur, grupo matemático	2024	7	4
Alxeria	—	Baccalauréat, Mathématiques	2026	6	7
Camerún	—	Baccalauréat, séries C e E	2025	5	12

PISA: puntuación media en matemáticas en PISA 2025 (media OCDE: 463); as comunidades autónomas sitúanse polo seu valor no informe español (*Catalunya: dato non comparábel). A fila de Galiza é a referencia da escala de dificultade e comparte posto cos exames valorados con 5. Dificultade: estimación relativa aos 25 exames analizados con enunciado dispoñíbel (fixando como convenio o valor do exame da PAU de Galiza = 5); o posto 1 é o máis difícil. Chile non ten valoración porque non se reproduce o enunciado (véxase o seu capítulo). A valoración de México baséase en só catro reactivos de exemplo.

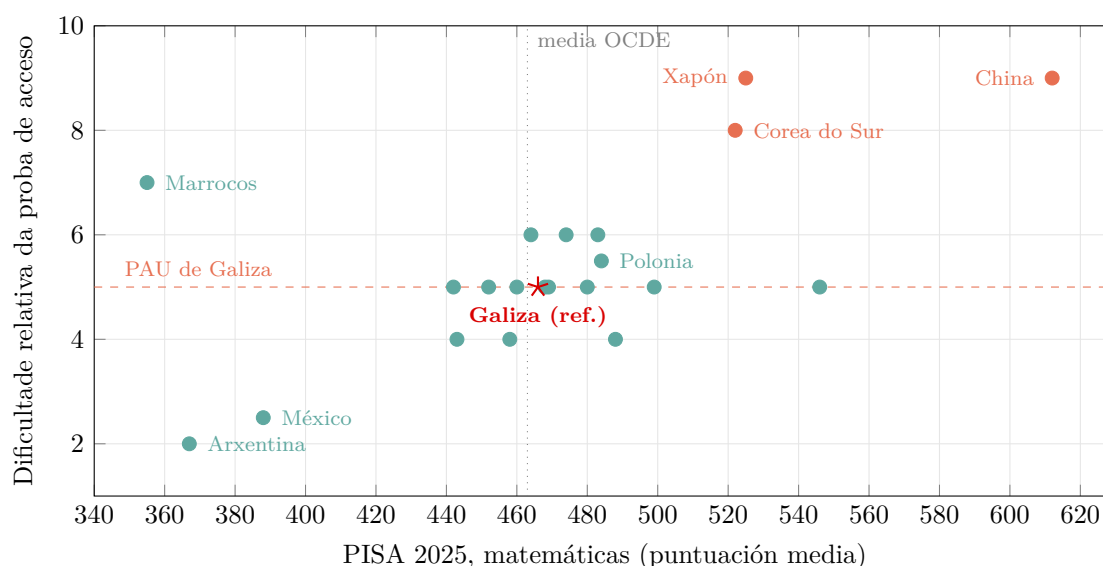
Dificultade relativa dos exames analizados



Como ler esta escala. Os exames de Xapón (Universidade de Tokio) e China (Gaokao) destacan claramente, seguidos do coreano (Suneung): problemas abertos ou moi pouco guiados e moi esixentes en razoamento. No outro extremo están probas de nivel de precálculo ou de escolla múltiple moi básica. A maioría dos exames europeos sitúanse arredor da PAU galega, aínda que con temarios a miúdo máis amplos (números complexos, ecuacións diferenciais, sucesións, estatística inferencial) e exercicios máis guiados. En Irán e Marrocos o que eleva a dificultade é, respectivamente, o ritmo (40 preguntas en 70 minutos) e a amplitude do temario (aritmética, estruturas alxébricas). Entre as comunidades españolas, o exame andaluz queda á altura do galego e o catalán, lixeiramente por riba, máis pola lonxitude e a redacción que polos contidos.

Matemáticas en PISA e dificultade da PAU: hai correlación?

Para os 21 sistemas que teñen á vez puntuación en matemáticas en PISA 2025 e un exame de acceso valorado, o gráfico seguinte enfronta as dúas magnitudes.



Puntos sen etiqueta: dificultade 6: Países Baixos, Catalunya, Alemaña; dificultade 5: Taiwán, Suíza, Irlanda, Finlandia, Italia, Portugal, Noruega, Andalucía; dificultade 4: Reino Unido, Francia, Vietnam.

Que din os números. O coeficiente de correlación de Spearman (de rangos, o adecuado para unha escala ordinal como a de dificultade) é $\rho_s = 0,50$ (valor $p \approx 0,020$; $n = 21$); o de Pearson, $r = 0,62$ ($p \approx 0,003$), e o τ de Kendall, $0,42$ ($p \approx 0,011$). Hai, polo tanto, unha asociación positiva moderada: os países con mellor resultado en matemáticas en PISA tenden a ter probas de acceso máis esixentes.

Pero é unha correlación de extremos. A asociación descansa case por completo nos catro casos situados nas puntas da escala. Se se retiran Arxentina e México (países sen un exame nacional comparábel), o coeficiente de Spearman baixa a $0,38$ ($p \approx 0,11$; $n = 19$), e se ademais se retiran China e Xapón queda en $\rho_s = 0,15$ ($p \approx 0,57$; $n = 17$): no amplo grupo central, que inclúe a maioría dos países europeos e as comunidades españolas, a relación practicamente desaparece e a dificultade da proba móvese arredor da PAU galega con independencia da puntuación en matemáticas de PISA. Marrocos é o contraexemplo máis claro: a puntuación en matemáticas de PISA máis baixa da mostra e un dos exames máis difíciles, porque a filial *Sciences Mathématiques* só a cursa unha minoría moi seleccionada.

Cautelas. A mostra é pequena; a dificultade é unha estimación subxectiva, con moitos empates no valor 5; PISA mide alumnado de quince anos e a proba de acceso, só a parte do alumnado que chega a ela (moi diferente dun país a outro); e, en calquera caso, correlación non implica causalidade. Os datos describen, non explican.

Sobre as fontes

Sempre que foi posíbel traballouse co caderno oficial de cada proba, cuxa ligazón figura na ficha correspondente. Nalgúns casos, porén, os exames consultados eran publicacións de profesorado e non os exames oficiais. Confiamos no bo facer dos compañeiros doutros países.

Países segundo os resultados en matemáticas de PISA 2025

De maior a menor puntuación media en matemáticas: de China (612) a Marrocos (355)

1 China

PISA 2025, matemáticas: 612 puntos (mostra de Pequín, Xangai, Jiangsu e Zhejiang)

Dificultade relativa estimada: 9/10 (posto 1 dos 25 exames analizados; PAU de Galiza = 5)

Exame: Exame nacional unificado de acceso ás institucións de ensino superior ordinario (Gaokao) — Matemáticas, proba do novo currículo, modelo I (*Xin kebiao I juan*, «proba nacional I»)

Nome orixinal: *Putong gaodeng xuexiao zhaosheng quanguo tongyi kaoshi (Xin kebiao I juan)* — *Shuxue* («Exame nacional unificado de admisión nas institucións de ensino superior ordinario (modelo I do novo currículo) — Matemáticas»)

Ano e convocatoria: 2026, convocatoria única (7 de xuño de 2026)

Duración: 120 minutos **Calculadora:** non permitida

Estrutura e cualificación: 19 preguntas, 150 puntos: 8 preguntas de escolla única (5 puntos cada unha), 3 de escolla múltiple (6 puntos cada unha), 3 de completar (5 puntos cada unha) e 5 problemas de resposta desenvolvida (77 puntos en total).

Contexto: O Gaokao é o exame estatal que decide o acceso á universidade en China; a nota (sobre 750 puntos, das que 150 son de matemáticas) determina a universidade en que se pode ingresar. O modelo I (*Quanguo yi juan*), elaborado polo Centro Nacional de Exames do Ministerio de Educación, é o que realizan máis candidatos; as matemáticas son obrigatorias e comúns a todos os itinerarios.

Fonte: https://www.math90.com/blog/?slug=article_198; <https://liangshibao.com/tiku/gaokao-math-2026-i>; <https://www.cnblogs.com/Eufisky/p/20460021> (pregunta 19)

Instrucións

Esta proba consta de 19 preguntas. Puntuación total: 150 puntos. Tempo: 120 minutos.

Indicacións:

1. Antes de responder, o candidato debe escribir na folla de respostas o seu nome, número de candidato, número de aula de exame e número de asento.
2. Nas preguntas de escolla, despois de elixir a resposta de cada pregunta, encha con lapis na folla de respostas a letra correspondente. Se ten que cambiala, borre ben coa goma e marque a outra letra. Nas preguntas que non son de escolla, escriba a resposta na folla de respostas. O que se escriba neste caderno de preguntas non é válido.
3. Ao rematar o exame, entregue xuntos este caderno e a folla de respostas.

I. Preguntas de escolla única

Esta parte consta de 8 preguntas, de 5 puntos cada unha, 40 puntos en total. En cada pregunta, das catro opcións dadas, só unha cumpre o requirido.

1. A mediana dos datos da mostra 6, 8, 4, 5, 12 é

- (A) 5
- (B) 6
- (C) 8
- (D) 9

2. Sexan $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vectores do plano non colineais tales que $2\mathbf{a} + y\mathbf{b} = x\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$. Entón

- (A) $x = 2, y = -3$
(B) $x = -2, y = 3$
(C) $x = 2, y = 3$
(D) $x = -2, y = -3$
3. Sexan os conxuntos $A = \left\{ \sin \frac{7\pi}{6}, \cos \frac{5\pi}{3}, \tan \frac{5\pi}{4} \right\}$ e $B = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right\}$. Entón $A \cap B =$
- (A) $\left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right\}$
(B) $\left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right\}$
(C) $\left\{ -\frac{1}{2}, 1 \right\}$
(D) $\left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right\}$
4. A ecuación da recta tanxente á curva $y = 5x + 8 \ln x$ no punto $(1, 5)$ é
- (A) $y = 3x + 2$
(B) $y = 5x$
(C) $y = 8x - 3$
(D) $y = 13x - 8$
5. As parábolas $C_1: y^2 = 2p_1x$ ($p_1 > 0$) e $C_2: x^2 = 2p_2y$ ($p_2 > 0$) pasan ambas polo punto $(4, 8)$. A distancia entre o foco de C_1 e o foco de C_2 é
- (A) 12
(B) $4\sqrt{5}$
(C) 6
(D) $\frac{\sqrt{65}}{2}$
6. O valor máximo da función $f(x) = \frac{x+2}{e^x+a}$ é 1. Entón $a =$
- (A) $\frac{1}{2}$
(B) 1
(C) $\frac{3}{2}$
(D) 2
7. As Cento Oito Pagodas están na cidade de Qingtongxia, na Rexión Autónoma Hui de Ningxia, e son famosas pola súa singular disposición arquitectónica e pola súa profunda historia e cultura. O conxunto ten 108 pagodas, dispostas seguindo a ladeira do monte, de arriba abaixo, en 12 filas. Denotamos por a_i ($i = 1, 2, \dots, 12$) o número de pagodas da fila i , onde $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = 3$, $a_4 = a_5 = 5$, e $a_6, a_7, \dots, a_{12}$ é unha progresión aritmética de primeiro termo 7 e diferenza 2. Repártense $a_1, a_2, \dots, a_{12}$ en 6 grupos de 2 números cada un, de xeito que as sumas dos 2 números de cada grupo poidan formar unha progresión aritmética de 6 termos e diferenza d ($d > 0$). Entón $d =$
- (A) 2
(B) 4
(C) 6
(D) 8
8. Sexa $U = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \{-2, -1, 1, 2\}, i = 1, 2, 3\}$ o conxunto formado por 64 puntos do espazo, e sexa o punto $P(1, 1, 1)$. Considérase o espazo mostral $\Omega = U \setminus \{P\}$ (complementario

de $\{P\}$ en U). Escóllese ao chou un punto de Ω e defínese a variábel aleatoria X así: para cada punto $A(x_1, x_2, x_3)$ de Ω , $X(A) = x_1 + x_2 + x_3$. A esperanza matemática de X é

- (A) $-\frac{1}{21}$
- (B) $-\frac{1}{63}$
- (C) 0
- (D) $\frac{1}{7}$

II. Preguntas de escolla múltiple

Esta parte consta de 3 preguntas, de 6 puntos cada unha, 18 puntos en total. En cada pregunta, das catro opcións dadas, varias cumpren o requirido. Se se escollen todas as correctas obtéñense 6 puntos; se se escollen só parte das correctas, obtense parte da puntuación; se se escolle algunha incorrecta, 0 puntos.

9. Sexa $z = 3 + 2i$. Entón

- (A) $\bar{z} = 3 - 2i$
- (B) $|z| = 5$
- (C) $z^2 = 5 + 12i$
- (D) $\frac{z+3}{z-i} \in \mathbb{R}$

10. No espazo, A e B son dous puntos fixos; o punto móbil C está a distancia 2 da recta AB e o punto móbil D está a distancia 1 da recta AB . Se o ángulo diedro $C-AB-D$ mide 60° , entón

- (A) $\angle CAD \geq 60^\circ$
- (B) $CD \geq \sqrt{3}$
- (C) se $AB \perp CD$, entón $CD \perp$ plano ABD
- (D) se $AB \perp$ plano ACD , entón $AC \perp AD$

11. Sexan as circunferencias $C_1: (x+1)^2 + y^2 = 1$, $C_2: (x-1)^2 + y^2 = 1$, $C_3: x^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 1$, e a recta $l: y = kx + b$, que corta cada unha de C_1, C_2, C_3 en dous puntos. Sexan s_1, s_2, s_3 , respectivamente, as lonxitudes das cordas que determinan C_1, C_2, C_3 sobre l . Entón

- (A) k pode tomar calquera valor real
- (B) hai exactamente 3 rectas l que verifican $s_1 = s_2 = s_3$
- (C) hai máis de 3 rectas l que verifican $s_1 + s_2 + s_3 = 3$
- (D) cando $b = 0$, o valor máximo de $s_1 + s_2 + s_3$ é $\frac{2\sqrt{21}}{3}$

III. Preguntas de completar

Esta parte consta de 3 preguntas, de 5 puntos cada unha, 15 puntos en total.

12. A excentricidade da hipérbole $5x^2 - 6y^2 = 1$ é _____.

13. Sexa $f(x) = 2\sin(ax + \theta)$ ($a \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \theta < 2\pi$) unha función par tal que $f(x)$ é monotonamente crecente no intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$. Entón $\theta =$ _____, $f(\frac{2\pi}{3}) =$ _____.

14. O número real q verifica o seguinte: existe unha sucesión $\{a_n\}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1 + a_2 + \dots + a_{3n} = n^2 + n$, e $\{a_n\}$ ten 9 termos consecutivos $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+8}$ que forman unha progresión xeométrica de razón q . O valor máximo de q é _____.

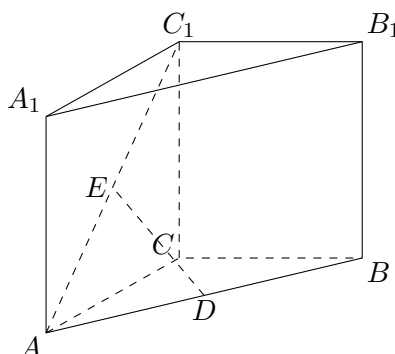
IV. Problemas de resposta desenvolvida

Esta parte consta de 5 preguntas, 77 puntos en total. As respostas deben incluír as explicacións escritas, as demostracións ou os pasos de cálculo.

15. (13 puntos)

Como se ve na figura, no prisma triangular recto $ABC-A_1B_1C_1$, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$, e D, E son, respectivamente, os puntos medios de AB e AC_1 .

- (1) Demostra que $DE \parallel$ plano BCC_1B_1 .
- (2) Sexa $CC_1 = 2$. Se o ángulo que forma a recta DE co plano ACC_1A_1 é de 45° , calcula a distancia da recta DE ao plano BCC_1B_1 .



16. (15 puntos)

No triángulo $\triangle ABC$, $AB = 3$, $BC = 2\sqrt{3}$, $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

- (1) Calcula $\cos A$.
- (2) Os puntos D e E verifican: D está na prolongación de BA (máis alá de A), $DE \parallel BC$ e $AE \perp AC$. Se $DE = \sqrt{6}$, calcula CE .

17. (15 puntos)

Sexa $N \geq 2$ un número enteiro. Un estudante practica lanzamentos a canastra cun balón; lanza como máximo N veces e deixa de practicar se e só se encesta unha vez ou falla os N lanzamentos. A probabilidade de encestar en cada lanzamento é p ($0 < p < 1$) e os resultados dos distintos lanzamentos son independentes. Sexa X o número de lanzamentos realizados polo estudante ao deixar de practicar.

- (1) Cando $N = 4$ e $p = \frac{1}{3}$, determina a distribución de probabilidade de X .
- (2) Sexan k e m números naturais.
 - (i) Cando $k \leq N - 1$, calcula $P(X > k)$.
 - (ii) Cando $k + m \leq N - 1$, demostra que $P(X > k + m \mid X > k) = P(X > m)$.

18. (17 puntos)

A elipse $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) ten o foco esquerdo en $F(-1, 0)$ e excentricidade $\frac{1}{2}$.

- (1) Determina a ecuación de C .
- (2) Sexa O a orixe de coordenadas. Unha recta móbil l que pasa por F e ten pendente maior ca 0 corta C nos puntos P e Q , con Q no terceiro cuadrante; a recta PO corta C noutro punto R .
 - (i) Se a área de $\triangle PQR$ é 3 veces a área de $\triangle PFO$, determina a ecuación de l .

(ii) Calcula o valor mínimo de $\tan \angle PQR$.

19.

(17 puntos)

A función $f(x)$ ten dominio $\mathbb{R}$ e, para $x < 0$, $f(x) = 2^x$. Para cada $x_0 \in \mathbb{R}$ defínese o conxunto $D(x_0) = \{d \in \mathbb{R} \mid f(x_0 + d) > f(x_0)\}$.

- (1) Se para $x \geq 0$ é $f(x) = 1 - x$, determina $D(-1)$.
- (2) Se $f(x)$ é unha función impar, $f(x_1) \leq f(x_2)$ e $x_1 x_2 \neq 0$, demostra que $D(x_2) \subseteq D(x_1)$.
- (3) Supón que $f(x)$ verifica: ① se $f(x_1) \leq f(x_2)$, entón $D(x_2) \subseteq D(x_1)$; ② para $0 < x < 1$, $f(x) < f(0)$.
 - (i) Demostra que $f(0) \geq 1$.
 - (ii) Demostra que $f(x)$ é monotonamente crecente no intervalo $(0, +\infty)$.

Solucións

I. Preguntas de escolla única

Pregunta 1. Ordenados: 4, 5, 6, 8, 12; a mediana é o termo central, 6. **Resposta: (B)**

Pregunta 2. $(2 - x)\mathbf{a} + (y + 3)\mathbf{b} = \mathbf{0}$ e, por seren $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ non colineais, $x = 2$, $y = -3$. **Resposta: (A)**

Pregunta 3. $\sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$, $\cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\tan \frac{5\pi}{4} = 1$, logo $A = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\}$ e $A \cap B = \{-\frac{1}{2}, 1\}$. **Resposta: (C)**

Pregunta 4. $y' = 5 + \frac{8}{x}$, $y'(1) = 13$; recta: $y - 5 = 13(x - 1)$, é dicir, $y = 13x - 8$. **Resposta: (D)**

Pregunta 5. $64 = 8p_1 \Rightarrow p_1 = 8$, foco $(4, 0)$; $16 = 16p_2 \Rightarrow p_2 = 1$, foco $(0, \frac{1}{2})$. Distancia: $\sqrt{16 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{65}}{2}$. **Resposta: (D)**

Pregunta 6. $f'(x) = \frac{a - (x+1)e^x}{(e^x + a)^2}$. Para que haxa máximo debe ser $a > 0$; como $g(x) = (x+1)e^x$ é crecente en $(-1, +\infty)$ e $g < 0$ en $(-\infty, -1)$, hai un único $x_0 > -1$ con $(x_0 + 1)e^{x_0} = a$, onde f pasa de crecer a decrecer. Nese punto $e^{x_0} + a = e^{x_0}(x_0 + 2)$, logo $f(x_0) = \frac{x_0 + 2}{e^{x_0}(x_0 + 2)} = e^{-x_0} = 1 \Rightarrow x_0 = 0$, e $a = (0 + 1)e^0 = 1$. **Resposta: (B)**

Pregunta 7. Os números son 1, 3, 3, 5, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 (suma 108). Se as sumas son $s_1, s_1 + d, \dots, s_1 + 5d$, entón $6s_1 + 15d = 108$, isto é, $2s_1 + 5d = 36$. Todos os números son impares, así que cada suma é par: s_1 par $\Rightarrow d$ par e $5d \equiv 0 \pmod{4}$, logo $d \equiv 0 \pmod{4}$. Como $s_1 \geq 1 + 3 = 4$, $5d \leq 28$, e $d > 0$ dá $d = 4$ ($s_1 = 8$). É realizábel: (1, 7), (3, 9), (3, 13), (5, 15), (5, 19), (11, 17) con sumas 8, 12, 16, 20, 24, 28. **Resposta: (B)**

Pregunta 8. En U a distribución de $x_1 + x_2 + x_3$ é simétrica respecto de 0, logo $\sum_{A \in U} X(A) = 0$. Quitando P (con $X(P) = 3$): $\sum_{\Omega} X = -3$ e $E(X) = \frac{-3}{63} = -\frac{1}{21}$. **Resposta: (A)**

II. Preguntas de escolla múltiple

Pregunta 9. (A) certa. (B) $|z| = \sqrt{13}$, falsa. (C) $z^2 = 9 - 4 + 12i = 5 + 12i$, certa. (D) $\frac{6+2i}{3+i} = 2 \in \mathbb{R}$, certa. **Resposta: ACD**

Pregunta 10. Tomamos a recta AB como eixe x , A na orixe, o semiplano de C como $\{z = 0, y > 0\}$ e o de D formando 60° con el: $C = (c, 2, 0)$, $D = \left(d, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

- (A) Falsa: $\cos \angle CAD = \frac{cd+1}{\sqrt{c^2+4}\sqrt{d^2+1}} \rightarrow 1$ se $c = d \rightarrow +\infty$, así que o ángulo pode ser tan pequeno como se queira.
- (B) Certa: $CD^2 = (c-d)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = (c-d)^2 + 3 \geq 3$.
- (C) Certa: $AB \perp CD \iff c = d$; entón $\overrightarrow{DC} = \left(0, \frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, que é perpendicular a $(1, 0, 0)$ e a $\overrightarrow{AD} - d(1, 0, 0) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ($\frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0$), que xeran o plano ABD .
- (D) Falsa: $AB \perp \text{plano } ACD \iff c = d = 0$; entón $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 1 \neq 0$ (de feito $\angle CAD = 60^\circ$, o ángulo plano do diedro).

Resposta: BC

Pregunta 11. Os centros $O_1(-1, 0)$, $O_2(1, 0)$, $O_3(0, \sqrt{3})$ forman un triángulo equilátero de lado 2; l corta as tres circunferencias se e só se a distancia de cada centro a l é < 1 , e entón $s_i = 2\sqrt{1-d_i^2}$.

- (A) Falsa. As distancias son menores ca 1 se e só se o ancho do triángulo na dirección normal a l é < 2 . Ese ancho vale 2 xusto cando a normal é paralela a un lado; para $k = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ ($l \perp O_1O_3$ ou $l \perp O_2O_3$) non hai ningunha recta válida.
- (B) Certa. $s_1 = s_2 = s_3 \iff d_1 = d_2 = d_3$; as rectas equidistantes de tres puntos non aliñados son as tres paralelas medias (paralelas a un lado a media altura), con $d_i = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ e pendentes $0, \pm\sqrt{3}$.
- (C) Certa. A recta $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dá $s_1 = s_2 = s_3 = 1$, suma 3. Para $y = t$, $S(t) = 4\sqrt{1-t^2} + 2\sqrt{1-(\sqrt{3}-t)^2}$ e $S'(\frac{\sqrt{3}}{2}) = -4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \neq 0$, logo S toma valores maiores e menores ca 3 en rectas válidas; por continuidade na familia (biparamétrica e conexa en cada pendente) hai infinitas rectas con suma 3.
- (D) Certa. Con $b = 0$: $d_1 = d_2 = \frac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}$, $d_3 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+k^2}} < 1 \iff k^2 > 2$, e $S = \frac{4+2\sqrt{k^2-2}}{\sqrt{1+k^2}}$.
Con $s = \sqrt{k^2-2} > 0$, $S = \frac{4+2s}{\sqrt{s^2+3}}$, $S' = 0 \iff 2(s^2+3) = (4+2s)s \iff s = \frac{3}{2}$, máximo
 $S = \frac{7}{\sqrt{21/4}} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$ (para $k^2 = \frac{17}{4}$).

Resposta: BCD

III. Preguntas de completar

Pregunta 12. $\frac{x^2}{1/5} - \frac{y^2}{1/6} = 1$: $e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} = 1 + \frac{5}{6} = \frac{11}{6}$, $\boxed{e = \frac{\sqrt{66}}{6}}$.

Pregunta 13. f par $\Rightarrow \sin \theta = \pm 1$ ($a \neq 0$, pois f constante non é crecente), $\theta \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$. Con $\theta = \frac{\pi}{2}$, $f = 2 \cos ax$ decrece á dereita de 0; con $\theta = \frac{3\pi}{2}$, $f = -2 \cos ax$ crece en $(0, \frac{\pi}{|a|})$, e $(0, \frac{\pi}{2})$ está contido aí se $|a| \leq 2$. Para $a = \pm 1$: $f(\frac{2\pi}{3}) = -2 \cos \frac{2\pi}{3} = 1$; para $a = \pm 2$: $-2 \cos \frac{4\pi}{3} = 1$.

$$\theta = \frac{3\pi}{2}, \quad f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1$$

Pregunta 14. A condición equivale a $b_n := a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n} = 2n$ ($n \geq 1$), co resto libre. Sexan $a_k = c$, $a_{k+1} = cq, \dots, a_{k+8} = cq^8$ ($c \neq 0, q \neq 0$).

- Se $k = 3m + 1$, os 9 termos son os bloques $m + 1, m + 2, m + 3$, de sumas $c(1 + q + q^2)q^0, q^3, q^6$; entón $q^3 = \frac{m+2}{m+1} = \frac{m+3}{m+2}$, imposíbel.
- Se $k = 3m + 2$ ou $k = 3m + 3$ ($m \geq 0$), contén exactamente dous bloques completos consecutivos, os $m + 2$ e $m + 3$, e as súas sumas están en razón q^3 : $q^3 = \frac{m+3}{m+2} \leq \frac{3}{2}$.

Con $k = 2$, $q^3 = \frac{3}{2}$ alcánzase: tómasese c con $cq^2(1 + q + q^2) = 4$, $a_1 = 2 - c - cq$ e os termos posteriores a a_{10} axustando as sumas dos bloques.

$$q_{\max} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt[3]{12}}{2}$$

IV. Problemas de resposta desenvolvida

Pregunta 15. (1) No triángulo ABC_1 , D e E son os puntos medios de AB e AC_1 , logo $DE \parallel BC_1$. Como $BC_1 \subset$ plano BCC_1B_1 e $DE \not\subset$ ese plano (D non está nel), $DE \parallel$ plano BCC_1B_1 .

(2) Sistema: C orixe, CA, CB, CC_1 eixes x, y, z ; $AC = BC = t$. $A(t, 0, 0)$, $B(0, t, 0)$, $C_1(0, 0, 2)$, $D(\frac{t}{2}, \frac{t}{2}, 0)$, $E(\frac{t}{2}, 0, 1)$, $\overrightarrow{DE} = (0, -\frac{t}{2}, 1)$. O plano ACC_1A_1 é $y = 0$, de normal $(0, 1, 0)$:

$$\sin 45^\circ = \frac{t/2}{\sqrt{t^2/4 + 1}} \iff \frac{t^2}{4} = 1 \iff t = 2.$$

Polo apartado (1), a distancia de DE ao plano BCC_1B_1 ($x = 0$) é a de D : $\frac{t}{2}$. $d = 1$

Pregunta 16. (1) $AC^2 = 9 + 12 - 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 9$, $AC = 3$. Entón $\cos A = \frac{9 + 9 - 12}{2 \cdot 3 \cdot 3}$,

$$\cos A = \frac{1}{3}.$$

(2) Coordenadas: $B(0, 0)$, $C(2\sqrt{3}, 0)$, $A(\sqrt{3}, \sqrt{6})$ ($AB = 3$, $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{3}$). $D = A + s\overrightarrow{BA} = (\sqrt{3}(1 + s), \sqrt{6}(1 + s))$, $s > 0$, e $E = D \pm (\sqrt{6}, 0)$ por ser $DE \parallel BC$, $DE = \sqrt{6}$. Con $\overrightarrow{AC} = (\sqrt{3}, -\sqrt{6})$:

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} = (\sqrt{3}s \pm \sqrt{6})\sqrt{3} - 6s = -3s \pm 3\sqrt{2} = 0 \Rightarrow s = \sqrt{2} \text{ (signo +)}.$$

$E = (\sqrt{3} + 2\sqrt{6}, \sqrt{6} + 2\sqrt{3})$, $\overrightarrow{CE} = (2\sqrt{6} - \sqrt{3}, \sqrt{6} + 2\sqrt{3})$, $CE^2 = (27 - 12\sqrt{2}) + (18 + 12\sqrt{2}) = 45$.

$$CE = 3\sqrt{5}$$

(Comprobación: $\overrightarrow{AE} = (2\sqrt{6}, 2\sqrt{3})$, $AE = 6$, e no triángulo ACE , rectángulo en A , $CE = \sqrt{AC^2 + AE^2} = \sqrt{9 + 36}$.)

Pregunta 17. (1) $X \in \{1, 2, 3, 4\}$: $P(X = k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \frac{1}{3}$ para $k = 1, 2, 3$ e $P(X = 4) = \left(\frac{2}{3}\right)^3$.

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{27}$

(Suma: $\frac{9+6+4+8}{27} = 1$.)

(2)(i) Para $k \leq N - 1$, $X > k$ se e só se fallan os k primeiros lanzamentos (o estudante segue lanzando mentres falla e non chegou a N): $P(X > k) = (1 - p)^k$ (tamén para $k = 0$).

(ii) $\{X > k + m\} \subseteq \{X > k\}$, logo, usando (i) con $k + m \leq N - 1$ e $m \leq N - 1$,

$$P(X > k + m \mid X > k) = \frac{P(X > k + m)}{P(X > k)} = \frac{(1 - p)^{k+m}}{(1 - p)^k} = (1 - p)^m = P(X > m). \quad \blacksquare$$

Pregunta 18. (1) $c = 1$, $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2$, $b^2 = 3$: $\boxed{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1}$.

(2) Sexa l : $x = ty - 1$, $t = \frac{1}{k} > 0$, $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ con $y_2 < 0 < y_1$ (ao ter pendente positiva por F , o punto inferior ten $x_2 = ty_2 - 1 < -1$, no terceiro cuadrante). Substituíndo:

$$(3t^2 + 4)y^2 - 6ty - 9 = 0, \quad y_1 + y_2 = \frac{6t}{3t^2 + 4}, \quad y_1 y_2 = \frac{-9}{3t^2 + 4}.$$

$R = -P$, por simetría central da elipse.

(i) O é o punto medio de PR , así que $SP_{QR} = 2SP_{QO}$, e como $F \in PQ$, $\frac{SP_{QO}}{SP_{FO}} = \frac{PQ}{PF}$. A condición dá $\frac{PQ}{PF} = \frac{3}{2}$, isto é, $PF = 2FQ$, $y_1 = -2y_2$. Entón $y_2 = -\frac{6t}{3t^2+4}$ e $-2y_2^2 = \frac{-9}{3t^2+4}$, de onde $72t^2 = 9(3t^2 + 4)$, $t^2 = \frac{4}{5}$, $k = \frac{\sqrt{5}}{2}$:

$$\boxed{l: y = \frac{\sqrt{5}}{2}(x + 1)}$$

(ii) Para P, R diametralmente opostos e Q na elipse, $k_{QP}k_{QR} = \frac{y_1^2 - y_2^2}{x_1^2 - x_2^2} = -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{3}{4}$, así que $k_{QR} = -\frac{3}{4k}$. O ángulo é agudo: $\vec{QP} \cdot \vec{QR} = |OQ|^2 - |OP|^2 = \frac{x_2^2 - x_1^2}{4}$ (pois $x^2 + y^2 = 3 + \frac{x^2}{4}$ na elipse) e $x_1 + x_2 = t(y_1 + y_2) - 2 = -\frac{8}{3t^2+4} < 0$, $x_1 - x_2 > 0$, logo $x_2^2 > x_1^2$. Polo tanto

$$\tan \angle PQR = \frac{k_{QP} - k_{QR}}{1 + k_{QP}k_{QR}} = \frac{k + \frac{3}{4k}}{1/4} = 4k + \frac{3}{k} \geq 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3},$$

con igualdade para $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$. $\boxed{(\tan \angle PQR)_{\min} = 4\sqrt{3}}$

Pregunta 19. (1) $f(-1) = \frac{1}{2}$. Se $-1 + d < 0$: $2^{d-1} > \frac{1}{2} \iff d > 0$, logo $d \in (0, 1)$. Se $-1 + d \geq 0$: $1 - (d - 1) > \frac{1}{2} \iff d < \frac{3}{2}$, logo $d \in [1, \frac{3}{2})$. $\boxed{D(-1) = (0, \frac{3}{2})}$

(2) Se f é impar: $f(0) = 0$ e, para $x > 0$, $f(x) = -2^{-x} \in (-1, 0)$, crecente; para $x < 0$, $f(x) = 2^x \in (0, 1)$, crecente. Calculamos D :

- $x_0 < 0$: $f(y) > 2^{x_0}$ só se $y < 0$ e $y > x_0$; $D(x_0) = (0, -x_0)$.
- $x_0 > 0$: $f(y) > f(x_0)$ se $y \leq 0$ (valor ≥ 0) ou $y > x_0$; $D(x_0) = (-\infty, -x_0] \cup (0, +\infty)$.

Se $f(x_1) \leq f(x_2)$, $x_1 x_2 \neq 0$: se $x_1, x_2 < 0$, entón $x_1 \leq x_2$ e $(0, -x_2) \subseteq (0, -x_1)$; se $x_1, x_2 > 0$, $x_1 \leq x_2$ e $(-\infty, -x_2] \cup (0, \infty) \subseteq (-\infty, -x_1] \cup (0, \infty)$; se $x_1 > 0 > x_2$, $(0, -x_2) \subseteq (0, +\infty) \subseteq D(x_1)$; e $x_1 < 0 < x_2$ é imposible porque daría $f(x_1) > 0 > f(x_2)$. En todos os casos $D(x_2) \subseteq D(x_1)$. $\blacksquare$

(3)(i) Supoñamos $f(0) < 1$. Escollemos $t < 0$ con $2^t \geq f(0)$ (calquera $t < 0$ se $f(0) \leq 0$; se non, $t \in [\log_2 f(0), 0)$). Entón $f(0) \leq f(t)$ e, por ①, $D(t) \subseteq D(0)$. Mais $(0, -t) \subseteq D(t)$, pois

$t < t + d < 0 \Rightarrow 2^{t+d} > 2^t$. Así, para $d \in (0, \min\{-t, 1\})$, $f(d) > f(0)$, en contradicción con ②. Logo $\boxed{f(0) \geq 1}$.

(ii) *Paso 1:* $f(x) \leq 0$ para $0 < x < 1$. Sexa $a < 0$. Se fose $f(a) \leq f(x)$, entón $D(x) \subseteq D(a)$; mais $-x \in D(x)$, pois $f(0) > f(x)$ por ②, e daquela $f(a - x) > f(a)$, é dicir, $2^{a-x} > 2^a$, falso. Logo $f(x) < 2^a$ para todo $a < 0$, e $f(x) \leq 0$.

Paso 2: $f(x) \leq 0$ para todo $x > 0$. Supoñamos $f(x) > 0$ para algún $x > 0$ e tomemos $a' < 0$ con $2^{a'} < f(x)$. Sexan $s \in (0, \min\{x, 1\})$, $h = x - s > 0$ e $a = a' - h < a'$. Como $f(a) < f(a')$, ① dá $D(a') \subseteq D(a)$. O número $d = x - a'$ está en $D(a')$, pois $f(a' + d) = f(x) > 2^{a'}$; logo $d \in D(a)$: $f(a + d) = f(s) > 2^a > 0$, en contradicción co paso 1.

Paso 3. Para $x > 0$ e $a < 0$: $f(x) \leq 0 < f(a)$, así que $D(a) \subseteq D(x)$, e como $(0, -a) \subseteq D(a)$, resulta $(0, -a) \subseteq D(x)$ para todo $a < 0$, isto é, $(0, +\infty) \subseteq D(x)$: $f(x + d) > f(x)$ para todo $d > 0$. Polo tanto f é (estritamente) crecente en $(0, +\infty)$. ■

2 Taiwán

PISA 2025, matemáticas: 546 puntos

Dificultade relativa estimada: 5/10 (posto 12 dos 25 exames analizados; PAU de Galiza = 5)

Exame: Proba por materias (*Fenke Ceyan*) de acceso á universidade — Matemáticas A

Nome orixinal: 115 *xuenian du Fenke Ceyan, Shuxue Jia kaoke* — “Proba por materias do curso 115, materia Matemáticas A” (organizada pola *Daxue Ruxue Kaoshi Zhongxin*, CEEC, “Centro de Exames de Acceso á Universidade”)

Ano e convocatoria: curso académico 115 do calendario de Taiwán (2026–2027); proba celebrada en xullo de 2026 (convocatoria única)

Duración: 80 minutos **Calculadora:** non permitida

Estrutura e cualificación: 100 puntos. Parte I (76 puntos): 3 preguntas de resposta única (6 puntos cada unha), 5 de resposta múltiple (8 puntos cada unha) e 3 de resposta numérica en casañas (6 puntos cada unha). Parte II (24 puntos): dous bloques de preguntas mixtas (resposta numérica e resposta desenvolvida).

Contexto: O acceso á universidade en Taiwán ten dúas probas estatais da CEEC: a Proba de Capacidade Académica (*Xueke Nengli Ceyan*, en xaneiro), usada para a admisión por solicitude, e a Proba por materias (en xullo), usada na admisión por distribución segundo as notas. “Matemáticas A” é a variante para as carreiras científicas e técnicas (a “Matemáticas B” é para ciencias sociais).

Fonte: https://www.ceec.edu.tw/files/file_pool/1/0Q194554571830884494/01-115%E5%88%86%E7%A7%91%E6%B8%AC%E9%A9%97%E6%95%B8%E5%AD%B8%E7%94%B2%E8%80%83%E7%A7%91%E8%A9%A6%E5%8D%B7.pdf (páxina de probas: <https://www.ceec.edu.tw/xmfile?xsmsid=0J052427633128416650>)

[Nota: Houbo problemas para transcribir o exame, polo que houbo que empregar tamén o documento oficial de criterios de corrección da CEEC, coa clave oficial de respostas e coa resolución publicada en https://chu246.blogspot.com/2026/07/115_02085297101.html.]

Instrucións

Instrucións para responder. Duración da proba: 80 minutos.

- As preguntas de elección e de resposta en casañas respóndense na folla de respostas cun lapis 2B; para corrixir, úsase a goma; non se pode usar corrector (de cinta ou líquido).
- Salvo indicación en contra, as preguntas de resposta desenvolvida respóndense na folla de respostas cun bolígrafo de tinta negra de punta grosa; para corrixir pódese usar corrector.
- O alumnado debe marcar ou responder segundo estas normas; se non o fai e iso dificulta a lectura ou a corrección das respostas, a cualificación pode verse afectada.
- Hai unha soa folla de respostas por persoa; non se pode pedir outra.
- Nas preguntas de resposta en casañas débese seguir o formato de cada pregunta, e en cada fila só se pode marcar unha casaña.

Puntuación das preguntas de elección e de resposta en casañas.

- Resposta única: cada pregunta ten n opcións, das que só unha é a correcta ou a máis axeitada. Cada resposta correcta recibe a puntuación da pregunta; unha resposta errada, en branco ou con máis dunha opción marcada puntúa cero.
- Resposta múltiple: cada pregunta ten n opcións, das que polo menos unha é correcta. Cada opción xúlgase de forma independente; se todas as opcións están ben, obtense a puntuación

completa; se hai k opcións erradas, obtense a fracción $\frac{n-2k}{n}$ da puntuación; se o resultado é negativo ou non se marca ningunha opción, a pregunta puntúa cero.

- Resposta en casañas: cada pregunta ten n casañas; só se puntúa se están todas ben; as respostas erradas non descontan.

Fórmulas de referencia e valores que se poden necesitar.

1. A suma dos n primeiros termos da progresión aritmética de primeiro termo a e diferenza d é $\frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$; a suma dos n primeiros termos da progresión xeométrica de primeiro termo a e razón r ($r \neq 1$) é $\frac{a(1-r^n)}{1-r}$.
2. Sumas: $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
3. Fórmulas trigonométricas da suma: $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$, $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$, $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$.
4. Teorema do seno no triángulo ABC : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R é o raio da circunferencia circunscrita).
Teorema do coseno: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$.
5. Datos unidimensionais $X : x_1, x_2, \dots, x_n$: media aritmética $\mu_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$; desviación típica

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \mu_X^2}.$$

6. Datos bidimensionais $(X, Y) : (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$: coeficiente de correlación

$$r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n \sigma_X \sigma_Y};$$

recta de regresión: $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$.

7. Valores de referencia: $\sqrt{2} \approx 1,414$, $\sqrt{3} \approx 1,732$, $\sqrt{5} \approx 2,236$, $\sqrt{6} \approx 2,449$, $\pi \approx 3,142$.
8. Logaritmos: $\log 2 \approx 0,3010$, $\log 3 \approx 0,4771$, $\log 5 \approx 0,6990$, $\log 7 \approx 0,8451$.
9. Se $X \sim B(n, p)$ segue unha distribución binomial, a esperanza é $E(X) = np$ e a varianza $\text{Var}(X) = np(1-p)$; se $X \sim G(p)$ segue unha distribución xeométrica, $E(X) = \frac{1}{p}$ e $\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

[Nota: En Taiwán $\log$ denota o logaritmo decimal.]

Parte I. Preguntas de elección e de resposta en casañas (76 puntos)

I. Preguntas de resposta única (18 puntos). Preguntas 1 a 3, 6 puntos cada unha.

1. Sábese que a elipse debuxada con “liña grosa gris” na figura ten por ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
Escolle a opción que con maior probabilidade é a ecuación da gráfica debuxada con “liña grosa negra”.

[Nota: Na figura: nun sistema de eixes coordenados (o eixe x aproximadamente entre -10 e 10 , o eixe y entre -5 e 5) represéntanse unha elipse gris de eixe maior vertical ($b > a$) e, en negro, unha hipérbole cos ramos abertos cara á esquerda e cara á dereita, cos vértices no eixe x a unha distancia da orixe aproximadamente igual ao semieixe vertical b da elipse.]

$$(1) \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$(2) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$(3) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

$$(4) \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$(5) \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1$$

2. Sexa $a_1, a_2, a_3, \dots$ unha progresión xeométrica infinita de primeiro termo 1 e razón r (onde r é un número real non nulo). Sábese ademais que as dúas series xeométricas infinitas $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ e $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n-1} + \dots$ son converxentes e que o produto das súas sumas é 1. Escolle o valor correcto de r .

$$(1) \frac{1}{2}$$

$$(2) \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$(3) \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$

$$(4) \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$(5) \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

3. Para calquera número real x , escolle o valor máximo de $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin x - \sqrt{3} \cos x$.

$$(1) 1$$

$$(2) \sqrt{2}$$

$$(3) \sqrt{3}$$

$$(4) 1 + \sqrt{2}$$

$$(5) 1 + \sqrt{3}$$

II. Preguntas de resposta múltiple (40 puntos). Preguntas 4 a 8, 8 puntos cada unha.

4. Nunha caixa hai bólas numeradas co 1, co 2 e co 3: n_1 , n_2 e n_3 bólas, respectivamente (onde n_1, n_2, n_3 son enteiros positivos). Extráese unha bóla ao chou (todas as bólas teñen a mesma probabilidade de saír); as probabilidades de que o número da bóla extraída sexa 1, 2 ou 3 denótanse p_1 , p_2 , p_3 , respectivamente. Escolle as opcións correctas.

(1) Sabendo que se extraeu unha bóla e que non é a bóla número 1, a probabilidade de que sexa unha bóla número 2 é $\frac{p_2}{1 - p_1}$.

(2) A esperanza do número da bóla extraída é igual a $2 - p_1 + p_3$.

(3) Se n_1, n_2, n_3 forman unha progresión aritmética, entón p_1, p_2, p_3 tamén forman unha progresión aritmética.

(4) Se n_1, n_2, n_3 forman unha progresión xeométrica, entón $p_2 \geq \frac{1}{3}$.

- (5) Se $p_k < \frac{1}{2}$ para $k = 1, 2, 3$, entón n_1, n_2, n_3 poden ser as lonxitudes dos tres lados dun triángulo.

5. Sexa a un número real. Acerca das propiedades do número complexo $z = \frac{a-2i}{1+2i}$, esolle as opcións correctas (onde $i = \sqrt{-1}$ e $\bar{z}$ é o conxugado de z).

- (1) A parte real de z é $\frac{a-4}{5}$.
 (2) Se $z = \bar{z}$, entón $a = 1$.
 (3) $|z|^2 \geq \frac{4}{5}$.
 (4) Se $a = 0$, entón o argumento principal de z é maior que π .
 (5) Sexa cal sexa o valor de a , z nunca está no primeiro cuadrante do plano complexo.

6. Para un polinomio $f(x)$ de coeficientes reais, divídese o intervalo pechado $[a, b]$ en tres partes iguais. A suma de Riemann obtida tomando o valor de $f(x)$ no extremo esquerdo de cada subintervalo denótase $M_a^b(f)$, é dicir,

$$M_a^b(f) = \frac{b-a}{3} \left[f(a) + f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + f\left(a + \frac{2(b-a)}{3}\right) \right];$$

a suma de Riemann obtida tomando o valor de $f(x)$ no extremo dereito de cada subintervalo denótase $N_a^b(f)$, é dicir,

$$N_a^b(f) = \frac{b-a}{3} \left[f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + f\left(a + \frac{2(b-a)}{3}\right) + f(b) \right].$$

Coñécense os signos de $f(x)$ e das súas derivadas primeira e segunda en tres intervalos abertos, segundo a táboa seguinte:

Intervalo	(2, 3)	(4, 5)	(6, 7)
$f(x)$	positivo	negativo	negativo
$f'(x)$	negativo	positivo	negativo
$f''(x)$	negativo	negativo	positivo

Esolle as opcións correctas.

- (1) No intervalo aberto $(4, 5)$, a función $y = f(x)$ é crecente e a súa gráfica é cóncava cara arriba.
 (2) No intervalo pechado $[5, 6]$, a gráfica da función $y = f(x)$ ten un punto de inflexión.
 (3) $\int_2^3 f(x) dx < M_2^3(f)$
 (4) $\int_4^5 f(x) dx > N_4^5(f)$
 (5) $\int_6^7 f(x) dx > \frac{1}{2} (M_6^7(f) + N_6^7(f))$

7. Considera a función $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$. Esolle as opcións correctas.

- (1) Para $x < 1$, $f(x)$ sempre está definida.
 (2) Cando $f(x)$ e $f(-x)$ están definidas, cúmprese $f(-x) = -f(x)$.
 (3) Se $f(x) > 0$, entón $x > 0$.

- (4) Existe un número real a tal que $f(a) = -100$.
- (5) No plano coordenado, a gráfica de $y = f(x)$ e a gráfica de $y = 10^{\frac{1+x}{1-x}}$ son simétricas respecto da recta $y = x$.
8. Dous vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ do plano coordenado verifican $|\vec{u} - \vec{v}| = 2$ e $\vec{u} + \vec{v} = (2, 2)$. Escolle as opcións correctas.
- (1) $|\vec{v} - (1, 1)| = 1$
- (2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$
- (3) $|\vec{v}| \leq 2$
- (4) $\vec{u}$ non pode ser paralelo a $\vec{v}$.
- (5) Se o ángulo que forman $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é θ , entón $|\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta \leq 2\sqrt{2}$.

III. Preguntas de resposta en casañas (18 puntos). Preguntas 9 a 11, 6 puntos cada unha.

9. Unha persoa vai ao mercado e compra tres tipos de froita: xambos (*lianwu*), amorodos e uvas, cuxos prezos por *jin* (unidade de peso) son, respectivamente, 110, 190 e 160 dólares taiwaneses. Sábese que comprou en total 11 *jin* e medio de froita, que gastou 1945 dólares en total e que comprou 2 *jin* máis de amorodos ca de uvas. Sexan x , y e z os *jin* de xambos, amorodos e uvas comprados, respectivamente. Escríbese a información anterior como un sistema de tres ecuacións lineares con tres incógnitas e, simplificándoo polo método de eliminación de Gauss, obtense a matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{23}{2} \\ 0 & 8 & a & 68 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array} \right].$$

Entón $a = \boxed{9-1}$ e $b = \boxed{9-2}$.

[Nota: 1 jin taiwanés = 600 g. O xambo (*Syzygium samarangense*, “*wax apple*”) é unha froita tropical.]

10. No plano coordenado, unha circunferencia C ten o centro no eixe x e non corta ningunha das dúas rectas $L_1: y = \frac{4}{3}x$ e $L_2: y = -\frac{3}{4}x$. Sexa d_1 a distancia mínima dos puntos de C a L_1 e d_2 a distancia mínima dos puntos de C a L_2 . Se d_1 é o triplo de d_2 , entón as rectas que pasan pola orixe $(0, 0)$ e son tanxentes a C teñen pendente

$$\boxed{10-1} \frac{\sqrt{\boxed{10-2}}}{\boxed{10-3}}.$$

(Exprésase co radical simplificado.)

[Nota: A casaña 10-1 corresponde ao signo ($\pm$ ou $-$).]

11. Unha persoa participa nun xogo coas seguintes regras:

Na primeira fase lánzase un dado equilibrado cinco veces seguidas; sexa a variábel aleatoria X o número de veces que sae unha puntuación maior que 4. Se $X \geq 3$, pásase á segunda fase; noutro caso, queda eliminada.

Na segunda fase vólvese lanzar un dado equilibrado cinco veces seguidas; sexa a variábel aleatoria Y o número de veces que sae unha puntuación par. Se $Y = X - 1$, gáñase o premio; noutro caso, queda eliminada.

Entón, sabendo que a persoa gañou o premio, a probabilidade de que $X = 3$ é

$$\frac{\boxed{11-1} \boxed{11-2}}{\boxed{11-3} \boxed{11-4} \boxed{11-5}}.$$

(Exprésase como fracción irredutíbel.)

Parte II. Preguntas mixtas ou de resposta desenvolvida (24 puntos)

Esta parte ten 2 bloques de preguntas. As preguntas de elección ou de resposta en casañas valen 2 puntos cada unha; a puntuación das preguntas de resposta desenvolvida indícase ao final de cada unha. Responde só na zona da folia de respostas marcada co número da pregunta. As preguntas de elección/casiñas e as partes de debuxo das preguntas de resposta desenvolvida fanse con lapis 2B (para corrixir, úsase a goma; non se pode usar corrector). Nas preguntas de resposta desenvolvida escríbese de esquerda a dereita, en horizontal, e débense expoñer os cálculos ou os razoamentos; se non, descontarase puntuación.

Bloque das preguntas 12–14. Sexan $p(x)$ e $q(x)$ polinomios de coeficientes reais. Sábese que $q(x)$ é un polinomio de segundo grao con coeficiente principal 1 e que verifica

$$[q(x)]^2 = x \int_1^x p(t) dt.$$

Con base no anterior, responde ás seguintes preguntas.

12. Demostra que $q(0) = q(1)$. (resposta desenvolvida, 2 puntos)
13. Calcula $p(x)$. (resposta desenvolvida, 4 puntos)
14. Calcula o valor máximo e o valor mínimo da función polinómica $\int_1^x [p(t) - q(t)] dt$ no intervalo pechado $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$. (resposta desenvolvida, 6 puntos)

Bloque das preguntas 15–17. Considera no espazo coordenado os dous planos $E_1: x + y + 2z = 2$ e $E_2: 2x - y + z = 1$, e sexa L a súa recta de intersección. Con base no anterior, responde ás seguintes preguntas.

15. A distancia do punto $(1, 0, 0)$ a E_1 é $\frac{\sqrt{\boxed{15-1}}}{\boxed{15-2}}$. (Exprésase co radical simplificado.) (resposta en casañas, 2 puntos)
16. Outro plano E_3 é paralelo a L e contén a recta
- $$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad t \text{ número real.}$$

Determina a ecuación do plano E_3 . (resposta desenvolvida, 4 puntos)

17. Continuación da pregunta 16. Sexa E outro plano perpendicular aos tres planos E_1 , E_2 , E_3 , e sexa Γ o triángulo que delimitan no plano E as tres rectas de intersección de E con E_1 , E_2 e E_3 , respectivamente. Demostra que Γ é un triángulo equilátero e calcula a lonxitude do seu lado. (resposta desenvolvida, 6 puntos)

Solucións

Pregunta 1. A curva negra é unha hipérbole de eixe focal horizontal (ramos á esquerda e á dereita), polo que a súa ecuación é da forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; os vértices están en $(\pm b, 0)$, a unha distancia da orixe igual ao semieixe vertical b da elipse. Isto descarta (1) (elipse), (3) e (5) (ramos verticais) e (2) (vértices en $\pm a$). **Resposta: (4)** $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ (coincide coa clave oficial).

Pregunta 2. Converxencia: $|r| < 1$. As sumas son $\frac{1}{1-r}$ e $\frac{1}{1-r^2}$, e

$$\frac{1}{(1-r)(1-r^2)} = 1 \iff (1-r)^2(1+r) = 1 \iff r^3 - r^2 - r = 0 \iff r(r^2 - r - 1) = 0.$$

Como $r \neq 0$, $r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, e só $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0,618$ cumpre $|r| < 1$. **Resposta: (4).**

Pregunta 3. $\sin(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x$, logo

$$f(x) = \frac{3}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \sqrt{3} \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right),$$

porque $\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$. O máximo é $\sqrt{3}$. **Resposta: (3).**

Pregunta 4. Sexa $N = n_1 + n_2 + n_3$, $p_k = n_k/N$. (1) Correcta: $P(2 \mid \text{non } 1) = \frac{p_2}{p_2 + p_3} = \frac{p_2}{1 - p_1}$. (2) Correcta: $E = p_1 + 2p_2 + 3p_3 = 2(p_1 + p_2 + p_3) - p_1 + p_3 = 2 - p_1 + p_3$. (3) Correcta: os p_k obtéñense dividindo os n_k pola mesma constante N . (4) Falsa: con $n_1 = c$, $n_2 = cr$, $n_3 = cr^2$ é $p_2 = \frac{r}{1+r+r^2} \leq \frac{1}{3}$ (pois $1+r+r^2-3r = (1-r)^2 \geq 0$); p. ex., 1, 2, 4 dá $p_2 = \frac{2}{7} < \frac{1}{3}$. (5) Correcta: $p_k < \frac{1}{2} \iff n_k < \frac{N}{2} \iff n_k < \text{suma dos outros dous}$, que é a desigualdade triangular para os tres. **Resposta: (1), (2), (3), (5).**

Pregunta 5.

$$z = \frac{(a-2i)(1-2i)}{5} = \frac{(a-4) - (2a+2)i}{5}.$$

(1) Correcta. (2) Falsa: $z = \bar{z} \iff 2a+2=0 \iff a=-1$. (3) Correcta: $|z|^2 = \frac{a^2+4}{5} \geq \frac{4}{5}$. (4) Correcta: con $a=0$, $z = \frac{-4-2i}{5}$ está no terceiro cuadrante, de argumento principal entre π e $\frac{3\pi}{2}$ (aprox. 3,61). (5) Correcta: estaría no primeiro cuadrante se $a > 4$ e $a < -1$, imposíbel. **Resposta: (1), (3), (4), (5).**

Pregunta 6. (1) Falsa: en $(4,5)$ é $f' > 0$ (crecente) pero $f'' < 0$ (cóncava cara abaixo). (2) Correcta: f'' é un polinomio, $f'' < 0$ en $(4,5)$ e $f'' > 0$ en $(6,7)$; por continuidade e porque só ten un número finito de raíces, f'' cambia de signo nalgún punto de $[5,6]$, que é un punto de inflexión. (3) Correcta: en $[2,3]$ f é estritamente decrecente, así que en cada subintervalo o valor no extremo esquerdo supera os demais e $\int_2^3 f < M_2^3(f)$. (4) Falsa: en $[4,5]$ f é estritamente crecente, polo que a suma polo extremo dereito sobreestima: $\int_4^5 f < N_4^5(f)$. (5) Falsa: $\frac{1}{2}(M+N)$ é a regra dos trapezios; como $f'' > 0$ en $(6,7)$, a gráfica queda por debaixo de cada corda e $\int_6^7 f < \frac{1}{2}(M_6^7(f) + N_6^7(f))$. **Resposta: (2), (3)** (coincide coa clave oficial).

Pregunta 7. O dominio é $\frac{1+x}{1-x} > 0 \iff -1 < x < 1$. (1) Falsa: p. ex. $x = -2$ dá $\frac{1+x}{1-x} = -\frac{1}{3} < 0$. (2) Correcta: $f(-x) = \log \frac{1-x}{1+x} = -f(x)$. (3) Correcta: $f(x) > 0 \iff \frac{1+x}{1-x} > 1 \iff 1+x > 1-x$ (pois $1-x > 0$) $\iff x > 0$. (4) Correcta: $f(a) = -100 \iff \frac{1+a}{1-a} = 10^{-100} \iff a = \frac{10^{-100}-1}{10^{-100}+1} \in (-1,1)$. (5) Falsa: a inversa de f obtense de $10^y = \frac{1+x}{1-x}$, $x = \frac{10^y-1}{10^y+1}$; a gráfica simétrica respecto de $y=x$ é $y = \frac{10^x-1}{10^x+1}$, non $y = 10^{\frac{1+x}{1-x}}$. **Resposta: (2), (3), (4).**

Pregunta 8. Pomos $\vec{v} = (1, 1) + \vec{d}$, $\vec{u} = (1, 1) - \vec{d}$; entón $\vec{u} - \vec{v} = -2\vec{d}$ e $|\vec{d}| = 1$. (1) Correcta: $|\vec{v} - (1, 1)| = |\vec{d}| = 1$. (2) Correcta: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |(1, 1)|^2 - |\vec{d}|^2 = 2 - 1 = 1$. (3) Falsa: con $\vec{d} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$, $|\vec{v}| = \sqrt{2} + 1 > 2$. (4) Falsa: co mesmo $\vec{d}$, $\vec{u} = (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})(1, 1)$ e $\vec{v} = (1 + \frac{1}{\sqrt{2}})(1, 1)$ son paralelos. (5) Correcta: $|\vec{u}||\vec{v}| \sin \theta = |\det(\vec{u}, \vec{v})| = 2|\det((1, 1), \vec{d})| \leq 2\sqrt{2}|\vec{d}| = 2\sqrt{2}$. **Resposta: (1), (2), (5).**

Pregunta 9. O sistema é

$$x + y + z = \frac{23}{2}, \quad 110x + 190y + 160z = 1945, \quad y - z = 2.$$

Restando á segunda ecuación 110 veces a primeira: $80y + 50z = 680$, é dicir, $8y + 5z = 68$. Da terceira, $y = z + 2$, e $8(z + 2) + 5z = 68 \Rightarrow z = 4$ (e $y = 6$, $x = \frac{3}{2}$). Logo a matriz é a do enunciado con

$$\boxed{a = 5, \quad b = 4.}$$

Pregunta 10. Sexa o centro $(h, 0)$, $h \neq 0$, e o raio r . Distancias do centro: a $L_1: 4x - 3y = 0$, $\frac{4|h|}{5}$; a $L_2: 3x + 4y = 0$, $\frac{3|h|}{5}$. Como C non corta as rectas, $d_1 = \frac{4|h|}{5} - r$, $d_2 = \frac{3|h|}{5} - r > 0$, e

$$\frac{4|h|}{5} - r = 3 \left(\frac{3|h|}{5} - r \right) \iff r = \frac{|h|}{2} \quad (\text{entón } d_2 = \frac{|h|}{10} > 0).$$

O ángulo φ entre o eixe x e cada tanxente desde a orixe cumpre $\sin \varphi = \frac{r}{|h|} = \frac{1}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$, e as pendentes son $\pm \tan \frac{\pi}{6}$:

$$\boxed{\pm \frac{\sqrt{3}}{3}} \quad (10-1: \pm, 10-2: 3, 10-3: 3).$$

Pregunta 11. $X \sim B(5, \frac{1}{3})$ (saír 5 ou 6) e $Y \sim B(5, \frac{1}{2})$, independentes.

$$P(X = 3) = \frac{40}{243}, \quad P(X = 4) = \frac{10}{243}, \quad P(X = 5) = \frac{1}{243};$$

$$P(Y = 2) = P(Y = 3) = \frac{10}{32}, \quad P(Y = 4) = \frac{5}{32}.$$

$$P(\text{premio}) = \frac{40 \cdot 10 + 10 \cdot 10 + 1 \cdot 5}{243 \cdot 32} = \frac{505}{243 \cdot 32}, \text{ e}$$

$$P(X = 3 \mid \text{premio}) = \frac{400}{505} = \boxed{\frac{80}{101}} \quad (\text{casiñas: } 8, 0, 1, 0, 1).$$

Pregunta 12. Con $x = 0$: $[q(0)]^2 = 0$, logo $q(0) = 0$. Con $x = 1$: $[q(1)]^2 = 1 \cdot \int_1^1 p(t) dt = 0$, logo $q(1) = 0$. Polo tanto $q(0) = q(1) (= 0)$. ■

Pregunta 13. Polo anterior, q é mónico de grao 2 con raíces 0 e 1: $q(x) = x(x - 1)$. Entón

$$x^2(x - 1)^2 = x \int_1^x p(t) dt \implies \int_1^x p(t) dt = x(x - 1)^2$$

para $x \neq 0$ e, por seren polinomios, para todo x . Derivando:

$$p(x) = (x - 1)^2 + 2x(x - 1) = (x - 1)(3x - 1) = \boxed{3x^2 - 4x + 1}.$$

Pregunta 14. $p(x) - q(x) = 3x^2 - 4x + 1 - (x^2 - x) = 2x^2 - 3x + 1 = (2x - 1)(x - 1)$. Sexa

$$F(x) = \int_1^x (2t^2 - 3t + 1) dt = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x - \frac{1}{6}.$$

$F'(x) = (2x - 1)(x - 1)$: F decrece en $[\frac{1}{2}, 1]$ e crece en $[1, 3]$. Valores: $F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{24}$, $F(1) = 0$, $F(3) = 18 - \frac{27}{2} + 3 - \frac{1}{6} = \frac{22}{3}$.

$$\boxed{\text{máximo } \frac{22}{3} \text{ (} x = 3 \text{),} \quad \text{mínimo } 0 \text{ (} x = 1 \text{).}}$$

Pregunta 15. $d = \frac{|1+0+0-2|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{6}}$ (15-1: 6, 15-2: 6).

Pregunta 16. Dirección de L : $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (1, 1, 2) \times (2, -1, 1) = (3, 3, -3) \parallel (1, 1, -1)$. A recta dada ten dirección $(1, -1, 3)$ e pasa por $(3, -2, 2)$. Un vector normal de E_3 é

$$(1, 1, -1) \times (1, -1, 3) = (2, -4, -2) \parallel (1, -2, -1),$$

e substituíndo o punto: $3 + 4 - 2 = 5$.

$$\boxed{E_3: x - 2y - z = 5.}$$

($L \not\subset E_3$: o punto $(1, 1, 0) \in L$ non verifica a ecuación.)

Pregunta 17. Os tres planos conteñen a dirección $\vec{\ell} = (1, 1, -1)$ (os normais $\vec{n}_1 = (1, 1, 2)$, $\vec{n}_2 = (2, -1, 1)$, $\vec{n}_3 = (1, -2, -1)$ son ortogonais a $\vec{\ell}$). Un plano perpendicular aos tres ten normal paralela a $\vec{\ell}$, así que E é perpendicular a L , e as rectas $E \cap E_i$ teñen direccións $\vec{\ell} \times \vec{n}_i$; o ángulo entre dúas delas é o ángulo entre $\vec{n}_i$ e $\vec{n}_j$ (xirados 90° no plano E). Como $|\vec{n}_i| = \sqrt{6}$ e

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 3, \quad \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3 = -3, \quad \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3 = 3,$$

os ángulos entre as rectas son todos 60° ($\cos = \pm \frac{1}{2}$). As tres rectas non son concorrentes: $E \cap E_1 \cap E_2 = E \cap L$ é un punto que non está en E_3 (pois $L \parallel E_3$ e $L \not\subset E_3$). Logo Γ é un triángulo cos tres ángulos de 60° : é **equilátero**.

Lado: a altura desde o vértice $E \cap L$ ao lado contido en E_3 é a distancia de L ao plano E_3 (por ser $E \perp E_3$), que, co punto $(1, 1, 0) \in L$, vale

$$h = \frac{|1 - 2 - 0 - 5|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}, \quad \text{lado} = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \boxed{2\sqrt{2}}.$$

(Comprobado calculando os tres vértices nunha sección perpendicular a L .)

3 Xapón

PISA 2025, matemáticas: 525 puntos

Dificultade relativa estimada: 9/10 (posto 1 dos 25 exames analizados; PAU de Galiza = 5)

Exame: Proba escrita individual (segunda fase) de acceso á Universidade de Tokio, matemáticas para as ramas de ciencias (Ciencias I, II e III)

Nome orixinal: Tōkyō Daigaku, Ippan Senbatsu Zenki Nittei, Sūgaku (Rika) — “Universidade de Tokio, selección xeral, convocatoria principal (zenki), Matemáticas (ciencias)”; coñecido popularmente como *Tōdai rikei sūgaku*

Ano e convocatoria: 2026 (curso académico Reiwa 8), convocatoria principal (*zenki nittei*), febreiro de 2026

Duración: 150 minutos **Calculadora:** non permitida

Estrutura e cualificación: 6 problemas de resposta desenvolvida, todos obrigatorios. A proba de matemáticas vale 120 puntos dos 440 da segunda fase (lingua xaponesa 80, matemáticas 120, ciencias 120, lingua estranxeira 120); a universidade non publica a puntuación de cada problema (adoita estimarse en 20 puntos por problema).

Contexto: En Xapón non hai un exame único de acceso: todos os candidatos ás universidades nacionais fan primeiro o *Daigaku Nyūgaku Kyōtsū Tesuto* (“Proba Común de Acceso á Universidade”, organizada en xaneiro polo Centro Nacional de Exames), con probas tipo test de Matemáticas I · A e Matemáticas II · B · C (70 minutos cada unha). Cada universidade organiza despois a súa propia segunda proba escrita. Escolleuse aquí o exame de ciencias da Universidade de Tokio, a universidade máis selectiva do país, porque é de resposta desenvolvida e moi representativo do nivel máis alto; a Proba Común úsase en Tokio como primeira criba e computa 110 puntos sobre un total de 550.

Fonte: <https://manabitimes.jp/math/4041> (e seguintes); <https://math.nakaken88.com/problem/tokyo-u-r-2026-1/> (problemas 1–6); https://www.u-tokyo.ac.jp/ja/admissions/undergraduate/e02_07_25.html

Instrucións

[Nota: Duración: 150 minutos; todos os problemas son obrigatorios e as respostas deben xustificarse.]

Enunciados

- (1) Determina o valor máximo M e o valor mínimo m da función

$$f(\theta) = \sin \theta - \theta + \frac{\theta^3}{6}$$

no intervalo $-1 \leq \theta \leq 1$.

- (2) Para o valor M determinado en (1), demostra a seguinte desigualdade:

$$\frac{7}{8}\pi \leq \int_0^{2\pi} \sin(\cos x - x) dx \leq \frac{7}{8}\pi + 4M.$$

- Sexa n un enteiro positivo. Do conxunto formado polos $3n$ puntos do plano coordenado

$$\{(x, y) \mid x, y \text{ son enteiros que verifican } 1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq n\}$$

escóllense tres puntos distintos. Suponse que calquera terna de puntos ten a mesma probabilidade de ser escollida. Sexa p_n a probabilidade de que os tres puntos escollidos sexan os tres vértices dun triángulo.

- (1) Calcula p_5 .
 - (2) Sexa m un enteiro maior ou igual que 2. Calcula p_{2m} .
3. Sexa S a superficie esférica do espazo coordenado con centro na orixe e raio 5. Tres puntos distintos P, Q, R de S móvense de modo que cumpran a seguinte condición.
- Condición:** P e Q están no plano xy , e o baricentro do triángulo PQR é G(2, 0, 1).
- Responde ás seguintes cuestións.
- (1) Representa graficamente no plano xy o lugar xeométrico do punto medio M do segmento PQ.
 - (2) Representa graficamente no plano xy a rexión pola que pasa o segmento PQ.
4. Sexa k un número real e sexa C a curva do plano coordenado definida por $y = x^3 - kx$. Para dous puntos P, Q de C considérase a seguinte condición (*).
- Condición (*):** A orixe O, o punto P e o punto Q son distintos e, das rectas tanxentes a C en O, P e Q, calquera par delas córtase e todos os ángulos que forman son iguais a $\frac{\pi}{3}$.
- Considérase que o ángulo formado por dúas rectas toma valores entre 0 e $\frac{\pi}{2}$, ambos incluídos.
- (1) Determina os valores de k para os que existen P, Q que cumpren a condición (*).
 - (2) Suponse que k está no rango determinado en (1). Cando P e Q se moven cumprindo a condición (*), sexan M o valor máximo e m o valor mínimo da área S do triángulo limitado polas rectas tanxentes a C en O, P e Q. (Cando as tres rectas tanxentes se cortan nun mesmo punto, tómasse $S = 0$.) Determina o valor de k para o que $M = 4m$.
5. Sexa C a circunferencia do plano complexo con centro na orixe e raio 1. Para un número complexo α e un punto $P(z)$ de C , ponse $w = (z - \alpha)^3$. Sexa D o lugar xeométrico descrito polo punto $Q(w)$ cando P percorre C .
- (1) Sexa $\alpha = -3$ e sexa θ o argumento de w . Cando P percorre C , determina o conxunto de valores que pode tomar $\sin \theta$.
 - (2) O número α móvese de modo que cumpra a seguinte condición.
- Condición:** D ten puntos en común tanto coa parte positiva como coa parte negativa do eixe real.
- Calcula a área da rexión do plano complexo pola que se pode mover o punto $R(\alpha)$.
6. Sexa n un enteiro positivo. Denotamos por $f(n)$ o número de divisores positivos de n que dan resto 1 ao dividilos entre 3, e por $g(n)$ o número de divisores positivos de n que dan resto 2 ao dividilos entre 3.
- (1) Calcula $f(2800)$ e $g(2800)$.
 - (2) Demostra que $f(n) \geq g(n)$.
 - (3) Se $g(n) = 15$, determina os valores que pode tomar $f(n)$.

[Nota: Mantéñense os símbolos xaponeses de desigualdade $\leq, \geq$ (equivalen a $\leq, \geq$). No orixinal os problemas numéranse dai 1 mon–dai 6 mon (“problema 1”–“problema 6”).]

Solucións

Exercicio 1. (1) $f'(\theta) = \cos \theta - 1 + \frac{\theta^2}{2}$, $f''(\theta) = \theta - \sin \theta$, $f'''(\theta) = 1 - \cos \theta \geq 0$. Logo f'' é crecente e $f''(0) = 0$: $f'' \leq 0$ en $[-1, 0]$ e $f'' \geq 0$ en $[0, 1]$. Así f' ten o mínimo en $\theta = 0$, onde $f'(0) = 0$; polo tanto $f'(\theta) \geq 0$, con igualdade só en $\theta = 0$, e f é estritamente crecente en $[-1, 1]$. Como ademais f é impar,

$$M = f(1) = \sin 1 - \frac{5}{6}, \quad m = f(-1) = \frac{5}{6} - \sin 1 = -M.$$

(2) Desenvolvendo,

$$\sin(\cos x - x) = \sin(\cos x) \cos x - \cos(\cos x) \sin x.$$

Como $\frac{d}{dx} \sin(\cos x) = -\cos(\cos x) \sin x$,

$$\int_0^{2\pi} \cos(\cos x) \sin x \, dx = \left[-\sin(\cos x) \right]_0^{2\pi} = 0,$$

logo

$$I := \int_0^{2\pi} \sin(\cos x - x) \, dx = \int_0^{2\pi} \sin(\cos x) \cos x \, dx.$$

Pola definición de f , con $t = \cos x \in [-1, 1]$: $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + f(t)$. Entón

$$I = \int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx - \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} \cos^4 x \, dx + J, \quad J = \int_0^{2\pi} f(\cos x) \cos x \, dx.$$

Como $\int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx = \pi$ e $\int_0^{2\pi} \cos^4 x \, dx = \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{8} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 4x}{8} \right) dx = \frac{3\pi}{4}$, resulta $I = \pi - \frac{\pi}{8} + J = \frac{7}{8}\pi + J$.

Cota de J : por (1), f é impar e estritamente crecente, así que $f(t)$ ten o signo de t e $f(t)t \geq 0$; ademais $|f(t)| \leq M$ en $[-1, 1]$. Polo tanto

$$0 \leq f(\cos x) \cos x \leq M |\cos x| \implies 0 \leq J \leq M \int_0^{2\pi} |\cos x| \, dx = 4M,$$

e queda demostrado que $\frac{7}{8}\pi \leq I \leq \frac{7}{8}\pi + 4M$. (Numericamente: $I \approx 2,7649$, $\frac{7}{8}\pi \approx 2,7489$, $\frac{7}{8}\pi + 4M \approx 2,7814$.)

Exercicio 2. Hai $\binom{3n}{3}$ ternas. Tres puntos non forman triángulo só se están aliñados. Unha recta que contén tres puntos da malla ou é vertical (x constante: $3\binom{n}{3}$ ternas) ou ten un punto en cada columna: $(1, a), (2, b), (3, c)$ aliñados $\iff a + c = 2b$, isto é, a e c da mesma paridade (e entón $b = \frac{a+c}{2}$ é un enteiro entre 1 e n). Se hai i valores impares e j pares en $\{1, \dots, n\}$, o número destas ternas é $i^2 + j^2$ (inclúe as horizontais, $a = c$).

(1) $n = 5$: $i = 3$, $j = 2$; aliñadas: $3\binom{5}{3} + 9 + 4 = 43$; $\binom{15}{3} = 455$.

$$p_5 = 1 - \frac{43}{455} = \frac{412}{455}.$$

(2) $n = 2m$: $i = j = m$. Aliñadas: $3\binom{2m}{3} + 2m^2 = 2m(2m-1)(m-1) + 2m^2 = 2m(2m^2 - 2m + 1)$; total $\binom{6m}{3} = 2m(6m-1)(3m-1)$. Así

$$p_{2m} = 1 - \frac{2m^2 - 2m + 1}{(6m-1)(3m-1)} = \boxed{\frac{m(16m-7)}{(6m-1)(3m-1)}}.$$

(Comprobado por enumeración directa para $n = 2, 4, \dots, 12$ e $n = 5$.)

Exercicio 3. (1) Sexa $M(u, v, 0)$. Como $P + Q + R = 3G$, é $R = (6, 0, 3) - 2M = (6 - 2u, -2v, 3)$. A condición $R \in S$ dá

$$(6 - 2u)^2 + 4v^2 + 9 = 25 \iff (u - 3)^2 + v^2 = 4.$$

Reciprocamente, se M está nesta circunferencia e $M \neq (5, 0)$, entón $0 < |OM| < 5$, e a corda da circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ (no plano xy) perpendicular a OM por M dá P, Q distintos con punto medio M ; o punto R anterior está en S , ten $z = 3$ e é distinto de P e Q . O punto $(5, 0)$ é o único da circunferencia con $|OM| = 5$, o que obrigaría a $P = Q$. Lugar de M :

$$\boxed{\text{circunferencia } (x - 3)^2 + y^2 = 4 \text{ do plano } xy, \text{ excluído o punto } (5, 0).}$$

(2) Sexa C' o lugar anterior e $X(x, y)$ un punto do plano xy . A recta PQ é a perpendicular a OM por M ($M \neq O$), isto é, $X \cdot M = |M|^2$; o segmento PQ é esa recta intersecada co disco $x^2 + y^2 \leq 25$. Así, X está nalgún segmento PQ se e só se $|X| \leq 5$ e existe $M \in C'$ con

$$X \cdot M = |M|^2 \iff \left| M - \frac{1}{2}X \right| = \frac{1}{2}|X|,$$

é dicir, se a circunferencia Γ_X de diámetro OX corta C' (centro $A(3, 0)$, raio 2). Pondo $s = |X|$, a condición de corte é

$$\left| \frac{s}{2} - 2 \right| \leq \left| \frac{1}{2}X - A \right| \leq \frac{s}{2} + 2, \quad \left| \frac{1}{2}X - A \right|^2 = \frac{s^2}{4} - 3x + 9,$$

que equivale a $5 - 3x \leq 2s$ e $3x - 5 \leq 2s$, é dicir, $4(x^2 + y^2) \geq (3x - 5)^2$:

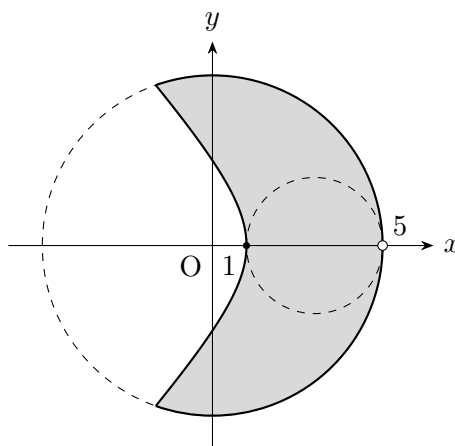
$$5(x - 3)^2 - 4y^2 \leq 20 \iff \frac{(x - 3)^2}{4} - \frac{y^2}{5} \leq 1.$$

O único punto de corte que podería ser o excluído $(5, 0)$ obriga a $5x = 25$, é dicir, $X = (5, 0)$ (pois $|X| \leq 5$), e para este X o único punto común é precisamente $(5, 0)$; logo hai que excluír ese punto.

A hipérbole $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ (centro $(3, 0)$, focos O e $(6, 0)$, vértices $(1, 0)$ e $(5, 0)$) corta $x^2 + y^2 = 25$ en $x = -\frac{5}{3}$, $y = \pm \frac{10\sqrt{2}}{3}$ (rama esquerda) e só toca o disco en $(5, 0)$ (rama dereita). Rexión:

$$\boxed{\{x^2 + y^2 \leq 25\} \cap \left\{ \frac{(x-3)^2}{4} - \frac{y^2}{5} \leq 1 \right\} \text{ excluído o punto } (5, 0),}$$

limitada pola rama esquerda da hipérbole entre $(-\frac{5}{3}, \pm \frac{10\sqrt{2}}{3})$ (pasando por $(1, 0)$) e polo arco da circunferencia de raio 5 con $x \geq -\frac{5}{3}$; o bordo está incluído, agás $(5, 0)$.



Exercicio 4. A tanxente a C no punto de abscisa t é $y = (3t^2 - k)x - 2t^3$, de pendente $3t^2 - k \geq -k$, con igualdade só en $t = 0$.

(1) Tres rectas que forman dúas a dúas ángulos de $\frac{\pi}{3}$ teñen ángulos de inclinación α , $\alpha + \frac{\pi}{3}$, $\alpha + \frac{2\pi}{3}$ (módulo π). Sexa $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a inclinación da tanxente en O, $\tan \alpha = -k$. As tanxentes en P e Q deben ter as outras dúas inclinacións, que non poden ser verticais, e pendentes $s > -k = \tan \alpha$; reciprocamente, toda pendente $s > -k$ se alcanza en $t = \pm \sqrt{(s+k)/3} \neq 0$ (e dúas tanxentes de pendentes distintas córtanse). Reducindo a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, a inclinación $\alpha + \frac{\pi}{3}$ dá pendente maior ca $\tan \alpha$ só se $\alpha < \frac{\pi}{6}$ (se non, redúcese a $\alpha - \frac{2\pi}{3} < \alpha$ ou é vertical), e $\alpha + \frac{2\pi}{3}$ só se $\alpha < -\frac{\pi}{6}$. Logo a condición é $\alpha < -\frac{\pi}{6}$, isto é, $-k < -\frac{1}{\sqrt{3}}$:

$$k > \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(2) Sexan $s_1 = \tan(\alpha + \frac{\pi}{3})$, $s_2 = \tan(\alpha + \frac{2\pi}{3})$, $a = \sqrt{\frac{s_1+k}{3}}$, $b = \sqrt{\frac{s_2+k}{3}}$; entón P e Q teñen abscisas $p = \pm a$, $q = \pm b$ (ou intercambiadas). As tanxentes en O e en t córtanse en $x = \frac{2t}{3}$, logo o lado do triángulo (equilátero, por formar ángulos de $\frac{\pi}{3}$) situado sobre a tanxente en O mide $\frac{2}{3}|p-q|\sqrt{1+k^2}$ e

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{9}(p-q)^2(1+k^2), \quad (p-q)^2 \in \{(a-b)^2, (a+b)^2\}.$$

Así $M/m = (\frac{a+b}{a-b})^2$ e $M = 4m \iff a+b = 2|a-b| \iff a = 3b$ ou $b = 3a$. Agora

$$s_1 + k = \tan(\alpha + \frac{\pi}{3}) - \tan \alpha = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \alpha \cos(\alpha + \frac{\pi}{3})}, \quad s_2 + k = \frac{\sin \frac{2\pi}{3}}{\cos \alpha \cos(\alpha + \frac{2\pi}{3})},$$

logo $\frac{a^2}{b^2} = \frac{\cos(\alpha + \frac{2\pi}{3})}{\cos(\alpha + \frac{\pi}{3})}$. Con $-\frac{\pi}{2} < \alpha < -\frac{\pi}{6}$ é $|\alpha + \frac{\pi}{3}| < \alpha + \frac{2\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$, polo que $0 < a < b$ e debe ser $b = 3a$:

$$\cos(\alpha + \frac{\pi}{3}) = 9 \cos(\alpha + \frac{2\pi}{3}) \iff \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha = -\frac{9}{2} \cos \alpha - \frac{9\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \iff \tan \alpha = -\frac{5}{4\sqrt{3}}.$$

Logo $k = -\tan \alpha = \frac{5\sqrt{3}}{12}$, que cumpre $k > \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{12}$. (Comprobación numérica: para este k as catro áreas posíbeis son 0,4569 e 1,8275, de cociente 4.)

Exercicio 5. (1) $w = (z+3)^3$, con $u = z+3$ percorrendo a circunferencia de centro 3 e raio 1 ($u \neq 0$). O argumento φ de u percorre $[-\varphi_0, \varphi_0]$, onde $\sin \varphi_0 = \frac{1}{3}$ (tanxentes desde a orixe),

e $\theta = 3\varphi$ percorre $[-3\varphi_0, 3\varphi_0]$. Como $\varphi_0 < \frac{\pi}{6}$, é $3\varphi_0 < \frac{\pi}{2}$ e $\sin \theta$ é crecente nese intervalo; $\sin 3\varphi_0 = 3 \cdot \frac{1}{3} - 4 \cdot \frac{1}{27} = \frac{23}{27}$:

$$\boxed{-\frac{23}{27} \leq \sin \theta \leq \frac{23}{27}}.$$

(2) Sexa $\beta = -\alpha$; $u = z - \alpha$ percorre a circunferencia Γ de centro β e raio 1. Para $u \neq 0$: $u^3 > 0 \iff \arg u \in \{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$ e $u^3 < 0 \iff \arg u \in \{\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\}$. Sexan $\ell_j = \{re^{ij\pi/3} : r > 0\}$, $j = 0, \dots, 5$. A condición é: Γ corta algún ℓ_j con j par e algún con j impar.

Como a semirecta pechada $\overline{\ell_j}$ é conexa e $|u - \beta| \rightarrow \infty$ sobre ela, Γ corta $\overline{\ell_j}$ se e só se $d(\beta, \ell_j) \leq 1$; o caso en que o único punto común é 0 esixe $|\beta| = 1$ (conxunto de área nula, que non afecta á área). Ademais $d(\beta, \ell_j)$ é a distancia á recta se a proxección de β sobre a dirección de ℓ_j é positiva, e $|\beta|$ en caso contrario. En particular todo β con $|\beta| \leq 1$ vale.

A configuración é invariante polos xiros de $\frac{\pi}{3}$ (que intercambian pares e impares) e polas simetrías respecto de cada ℓ_j , así que basta estudar o sector $0 \leq \arg \beta \leq \frac{\pi}{6}$, $\beta = x + iy$, $0 \leq y \leq \frac{x}{\sqrt{3}}$, con $|\beta| > 1$. Alí: $d(\beta, \ell_0) = y$, $d(\beta, \ell_2) = d(\beta, \ell_4) = d(\beta, \ell_3) = |\beta| > 1$, $d(\beta, \ell_1) = \frac{\sqrt{3}x - y}{2} \leq d(\beta, \ell_5) = \frac{\sqrt{3}x + y}{2}$. A condición queda $y \leq 1$ e $\sqrt{3}x - y \leq 2$, e a primeira dedúcese da segunda e de $y \leq \frac{x}{\sqrt{3}}$. A recta $\sqrt{3}x - y = 2$ é tanxente á circunferencia unidade (en $e^{-i\pi/6}$), logo o anaco do disco unidade do sector tamén cumpre a desigualdade. No sector, a rexión é o triángulo de vértices $0, \frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{3} + i$, de área $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Por simetría, a rexión de β é o hexagrama formado polos dous triángulos equiláteros de raio inscrito 1 e vértices $2e^{i(\pi/6+2k\pi/3)}$ e $2e^{i(\pi/2+2k\pi/3)}$; é simétrica respecto de 0, así que a rexión de $\alpha = -\beta$ é a mesma. Área:

$$12 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \boxed{4\sqrt{3}}.$$

(Comprobado por Monte Carlo cos datos orixinais: área $\approx 6,927$.)

Exercicio 6. Escribimos $n = 3^e \prod p_i^{a_i} \prod q_j^{b_j}$ con $p_i \equiv 1$, $q_j \equiv 2 \pmod{3}$. Os divisores non múltiplos de 3 son $\prod p_i^{x_i} \prod q_j^{y_j}$ ($0 \leq x_i \leq a_i$, $0 \leq y_j \leq b_j$), e o seu resto é $2^{\sum y_j} \equiv (-1)^{\sum y_j}$. Sexan $A = \prod (a_i + 1)$ e E, O o número de eleccións (y_j) con $\sum y_j$ par e impar. Entón $f(n) = AE$, $g(n) = AO$.

(1) $2800 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 7$: $A = 2$; pares $(y_1, y_2) \in \{0..4\} \times \{0, 1, 2\}$ con suma par: $3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8$, impar: $15 - 8 = 7$.

$$\boxed{f(2800) = 16, \quad g(2800) = 14.}$$

(2) $E - O = \prod_j \sum_{y=0}^{b_j} (-1)^y = \prod_j \varepsilon_j$, onde $\varepsilon_j = 1$ se b_j é par e 0 se é impar. Polo tanto

$$f(n) - g(n) = A \prod_j \varepsilon_j \geq 0,$$

isto é, $f(n) \geq g(n)$ (con igualdade se e só se algún b_j é impar). ■

(3) Se algún b_j é impar, $f = g = 15$; por exemplo $n = 2 \cdot 7^{14}$ ($A = 15$, $E = O = 1$). Se todos os b_j son pares, $E = O + 1$ e $f = A(O + 1) = 15 + A$ con $AO = 15$, así que $A \in \{1, 3, 5, 15\}$. Todos son posíbeis: $A = a + 1$ con 7^a , e calquera $O \geq 1$ obtense cun só $q = 2$ e expoñente $b = 2O$ (pois daquela $O = b/2$). Exemplos: $n = 2^{30}$ ($f = 16$), $2^{10} \cdot 7^2$ ($f = 18$), $2^6 \cdot 7^4$ ($f = 20$), $2^2 \cdot 7^{14}$ ($f = 30$).

$$\boxed{f(n) \in \{15, 16, 18, 20, 30\}}.$$

(Os exemplos e (1) comprobáronse contando divisores; (2) verificouse para $n < 3 \cdot 10^5$.)

4 Corea do Sur

PISA 2025, matemáticas: 522 puntos

Dificultade relativa estimada: 8/10 (posto 3 dos 25 exames analizados; PAU de Galiza = 5)

Exame: College Scholastic Ability Test (CSAT, coñecido como *Suneung*) — área de Matemáticas, opción Cálculo

Nome orixinal: *Daehak Suhak Neungnyeok Siheom — 2025 hangnyeondo, Suhak yeongyeok (Mijeokbun)* — “Proba de Aptitude Académica Universitaria do curso 2025, área de Matemáticas (Cálculo)”; segunda sesión (*je 2 gyosi*), caderno de tipo impar (*holsuhyeong*)

Ano e convocatoria: curso 2025; realizado o xoves 14 de novembro de 2024 (convocatoria única anual)

Duración: 100 minutos **Calculadora:** non permitida

Estrutura e cualificación: 30 preguntas e 100 puntos. As preguntas 1–22 son a parte común (*gongtong*: Matemáticas I e Matemáticas II) e valen 74 puntos; as preguntas 23–30 son a parte optativa (*seontaek*, 26 puntos), na que cada estudante escolle unha materia entre Probabilidade e estatística (*Hwangnyulgwa tonggye*), Cálculo (*Mijeokbun*) e Xeometría (*Giha*). Hai preguntas de escolla múltiple con 5 opcións (1–15 e 23–28) e de resposta curta cun número enteiro (16–22 e 29–30); cada pregunta vale 2, 3 ou 4 puntos. O resultado non se comunica como nota bruta, senón como puntuación estándar (*pyojun jeomsu*), percentil e nivel (*deunggeup*), nunha escala de 9 niveis (1 é o mellor).

Contexto: o Suneung é a proba nacional de acceso á universidade en Corea do Sur; organízao o Instituto Coreano de Currículo e Avaliación (KICE, *Hanguk Gyoyuk Gwajeong Pyeonggawon*). É o criterio principal na admisión ordinaria (*jeongsi*) e, en moitas admisións anticipadas (*susi*), esíxese un nivel mínimo. Escolleuse a opción de Cálculo porque, xunto coa parte común, é a máis próxima a Matemáticas II (límites, derivadas e integrais, incluídas as funcións exponenciais, logarítmicas e trigonométricas); a Matemáticas I e II coreanas correspóndense aproximadamente con funcións elementais, sucesións e cálculo polinómico.

Fonte: https://suneung-files.hdh061224.workers.dev/kice-v1/2025_csat_math_mijeok_q.pdf (caderno oficial de KICE: parte común e opción de Cálculo); páxina: <https://kicegg.com/exam-set-kice-2025-csat.html>; páxina oficial do Suneung: <https://www.suneung.re.kr>

Instrucións

[Nota: A puntuación de cada pregunta indícase entre corchetes; as preguntas 1–15 e 23–28 son de escolla múltiple con cinco opcións (no orixinal numeradas de ① a ⑤; aquí, de (1) a (5)) e as preguntas 16–22 e 29–30 son de resposta curta (a resposta é un número enteiro). Nas preguntas, log denota o logaritmo decimal.]

Parte común (Matemáticas I e II)

Escolla múltiple (5 opcións)

1. Canto vale $\sqrt[3]{5} \times 25^{\frac{1}{3}}$? (2 puntos)

- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 5

2. Para a función $f(x) = x^3 - 8x + 7$, canto vale $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$? (2 puntos)

- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 5

3. Unha progresión xeométrica $\{a_n\}$ ten o primeiro termo e a razón iguais ao número positivo k e cumpre

$$\frac{a_4}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} = 30.$$

Canto vale k ? (3 puntos)

- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 5

4. A función

$$f(x) = \begin{cases} 5x + a & (x < -2) \\ x^2 - a & (x \geq -2) \end{cases}$$

é continua en todo o conxunto dos números reais. Canto vale a constante a ? (3 puntos)

- (1) 6 (2) 7 (3) 8 (4) 9 (5) 10

5. Para a función $f(x) = (x^2 + 1)(3x^2 - x)$, canto vale $f'(1)$? (3 puntos)

- (1) 8 (2) 10 (3) 12 (4) 14 (5) 16

6. Se $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\frac{1}{5}$, canto vale $\frac{\sin \theta}{1 - \cos^2 \theta}$? (3 puntos)

- (1) -5 (2) $-\sqrt{5}$ (3) 0 (4) $\sqrt{5}$ (5) 5

7. A función polinómica $f(x)$ cumpre, para todo número real x ,

$$\int_0^x f(t) dt = 3x^3 + 2x.$$

Canto vale $f(1)$? (3 puntos)

- (1) 7 (2) 9 (3) 11 (4) 13 (5) 15

8. Para os dous números reais

$$a = 2 \log \frac{1}{\sqrt{10}} + \log_2 20, \quad b = \log 2,$$

canto vale $a \times b$? (3 puntos)

- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 5

9. Para a función $f(x) = 3x^2 - 16x - 20$ tense

$$\int_{-2}^a f(x) dx = \int_{-2}^0 f(x) dx.$$

Canto vale o número positivo a ? (4 puntos)

- (1) 16 (2) 14 (3) 12 (4) 10 (5) 8

10. A función $f(x) = a \cos bx + 3$, definida no intervalo pechado $[0, 2\pi]$, acada o seu valor máximo, 13, en $x = \frac{\pi}{3}$. Considera os pares ordenados (a, b) de números naturais a, b que cumpren isto. Cal é o valor mínimo de $a + b$? (4 puntos)

- (1) 12 (2) 14 (3) 16 (4) 18 (5) 20

11. Un punto P parte no instante $t = 0$ e móvese sobre a recta numérica; a súa posición no instante t ($t \geq 0$) é

$$x = t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 6t.$$

Canto vale a aceleración do punto P no instante en que, despois de partir, cambia o sentido do seu movemento? **(4 puntos)**

- (1) 6 (2) 9 (3) 12 (4) 15 (5) 18

12. A sucesión $\{a_n\}$ con $a_1 = 2$ e a progresión aritmética $\{b_n\}$ con $b_1 = 2$ cumpren, para todo número natural n ,

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{b_{k+1}} = \frac{1}{2}n^2.$$

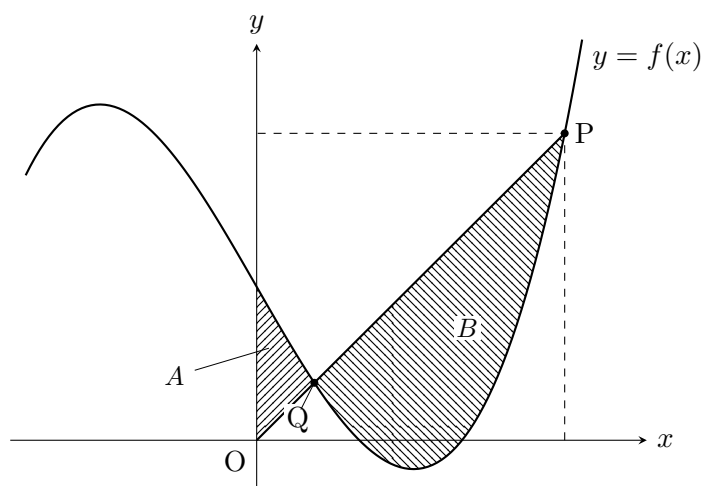
Canto vale $\sum_{k=1}^5 a_k$? **(4 puntos)**

- (1) 120 (2) 125 (3) 130 (4) 135 (5) 140

13. A función cúbica $f(x)$, de coeficiente principal 1, cumpre

$$f(1) = f(2) = 0, \quad f'(0) = -7.$$

Sexan O a orixe e P o punto $(3, f(3))$, e sexa Q o punto, distinto de P, no que o segmento OP corta a curva $y = f(x)$. Sexa A a área da rexión limitada pola curva $y = f(x)$, o eixe y e o segmento OQ, e sexa B a área da rexión limitada pola curva $y = f(x)$ e o segmento PQ. Canto vale $B - A$? **(4 puntos)**

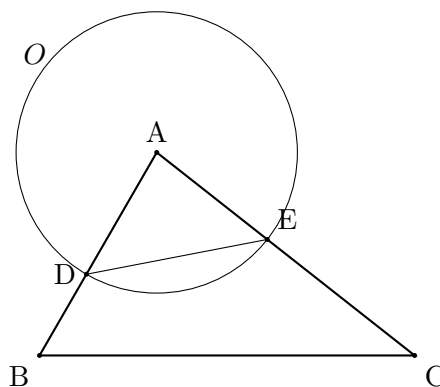


- (1) $\frac{37}{4}$ (2) $\frac{39}{4}$ (3) $\frac{41}{4}$ (4) $\frac{43}{4}$ (5) $\frac{45}{4}$

14. Como na figura, no triángulo ABC tómasse sobre o segmento AB o punto D con $\overline{AD} : \overline{DB} = 3 : 2$; sexa O a circunferencia de centro A que pasa por D, e sexa E o punto no que a circunferencia O corta o segmento AC. Tense

$$\sin A : \sin C = 8 : 5,$$

e a razón entre as áreas dos triángulos ADE e ABC é $9 : 35$. Se o raio da circunferencia circunscrita ao triángulo ABC mide 7, cal é o valor máximo da área do triángulo PBC cando P percorre a circunferencia O? (Considérase $\overline{AB} < \overline{AC}$). **(4 puntos)**



- (1) $18 + 15\sqrt{3}$ (2) $24 + 20\sqrt{3}$ (3) $30 + 25\sqrt{3}$ (4) $36 + 30\sqrt{3}$ (5) $42 + 35\sqrt{3}$

15. Para unha constante a ($a \neq 3\sqrt{5}$) e unha función cuadrática $f(x)$ de coeficiente principal negativo, a función

$$g(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + 15x + 7 & (x \leq 0) \\ f(x) & (x > 0) \end{cases}$$

cumple as condicións seguintes.

- (a) A función $g(x)$ é derivábel en todo o conxunto dos números reais.
 (b) A ecuación en x

$$g'(x) \times g'(x-4) = 0$$

ten exactamente 4 raíces reais distintas.

Canto vale $g(-2) + g(2)$?

(4 puntos)

- (1) 30 (2) 32 (3) 34 (4) 36 (5) 38

Resposta curta

16. Calcula o número real x que cumple a ecuación

$$\log_2(x-3) = \log_4(3x-5).$$

(3 puntos)

17. Para a función polinómica $f(x)$ tense $f'(x) = 9x^2 + 4x$ e $f(1) = 6$. Calcula $f(2)$. (3 puntos)

18. A sucesión $\{a_n\}$ cumple, para todo número natural n ,

$$a_n + a_{n+4} = 12.$$

Calcula $\sum_{n=1}^{16} a_n$.

(3 puntos)

19. Para o número positivo a , sexa a función

$$f(x) = 2x^3 - 3ax^2 - 12a^2x.$$

Se o máximo relativo da función $f(x)$ vale $\frac{7}{27}$, calcula $f(3)$.

(3 puntos)

20. Sexa k a abscisa do punto no que se cortan a curva $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$ e a recta $y = x$. A función $f(x)$, definida en todo o conxunto dos números reais, cumpre a condición seguinte.

Para todo número real x con $x > k$,

$$f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3} \quad \text{e} \quad f(f(x)) = 3x.$$

Calcula $f\left(\frac{1}{k^3 \times 5^{3k}}\right)$. (4 puntos)

21. Os enteiros a, b son tales que a función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 4$ cumpre a condición seguinte. Calcula o valor máximo de $f(1)$. (4 puntos)

Para todo número real α , existe o límite

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(2x+1)}{f(x)}.$$

22. Para todas as sucesións $\{a_n\}$ de termos enteiros que cumpren as condicións seguintes, calcula a suma de todos os valores de $|a_1|$. (4 puntos)

(a) Para todo número natural n ,

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 3 & (\text{se } |a_n| \text{ é impar}) \\ \frac{1}{2}a_n & (\text{se } a_n = 0 \text{ ou } |a_n| \text{ é par}) \end{cases}$$

(b) O menor número natural m tal que $|a_m| = |a_{m+2}|$ é 3.

* Comprobación: comproba que escribiches (marcaches) correctamente o necesario nos espazos correspondentes da folla de respostas.
 o A continuación veñen as preguntas da materia optativa (Probabilidade e estatística); comproba que é a materia que escolliches.

[Nota: No caderno completo, as materias optativas veñen na orde Probabilidade e estatística, Cálculo, Xeometría, e estes recadros remiten á materia seguinte do caderno completo; por iso o recadro remite a Probabilidade e estatística, aínda que aquí se reproduce a continuación a parte de Cálculo.]

Materia optativa: Cálculo (*Mijeokbun*)

Escolla múltiple (5 opcións)

23. Canto vale $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{\sin^2 x}$? (2 puntos)

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 5

24. Canto vale $\int_0^{10} \frac{x+2}{x+1} dx$? (3 puntos)

(1) $10 + \ln 5$ (2) $10 + \ln 7$ (3) $10 + 2 \ln 3$ (4) $10 + \ln 11$ (5) $10 + \ln 13$

25. Para a sucesión $\{a_n\}$ tense $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{n^2 + 3} = 1$. Canto vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{a_n^2 + n} - a_n \right)?$$

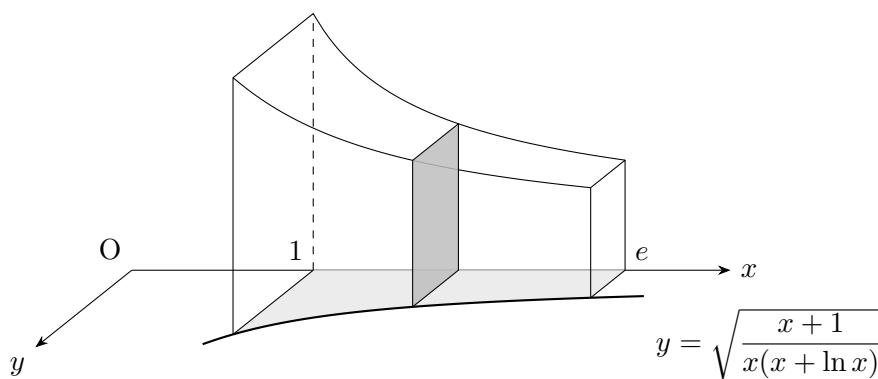
(3 puntos)

- (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) 1 (4) 2 (5) 3

26. Como na figura, hai un sólido cuxa base é a rexión limitada pola curva

$$y = \sqrt{\frac{x+1}{x(x+\ln x)}},$$

o eixe x e as rectas $x = 1$ e $x = e$. Todas as seccións deste sólido por planos perpendiculares ao eixe x son cadrados. Canto vale o volume do sólido? (3 puntos)



- (1) $\ln(e+1)$ (2) $\ln(e+2)$ (3) $\ln(e+3)$ (4) $\ln(2e+1)$ (5) $\ln(2e+2)$

27. Para a función cúbica $f(x)$ de coeficiente principal 1, sexa a función

$$g(x) = f(e^x) + e^x.$$

A recta tanxente á curva $y = g(x)$ no punto $(0, g(0))$ é o eixe x , e a función $g(x)$ ten función inversa $h(x)$. Canto vale $h'(8)$? (3 puntos)

- (1) $\frac{1}{36}$ (2) $\frac{1}{18}$ (3) $\frac{1}{12}$ (4) $\frac{1}{9}$ (5) $\frac{5}{36}$

28. A función $f(x)$ é derivábel en todo o conxunto dos números reais e a súa derivada é

$$f'(x) = -x + e^{1-x^2}.$$

Para o número positivo t , sexa $g(t)$ a área da rexión limitada pola recta tanxente á curva $y = f(x)$ no punto $(t, f(t))$, a curva $y = f(x)$ e o eixe y . Canto vale $g(1) + g'(1)$? (4 puntos)

- (1) $\frac{e}{2} + \frac{1}{2}$ (2) $\frac{e}{2} + \frac{2}{3}$ (3) $\frac{e}{2} + \frac{5}{6}$ (4) $\frac{2e}{3} + \frac{1}{2}$ (5) $\frac{2e}{3} + \frac{2}{3}$

Resposta curta

29. A progresión xeométrica $\{a_n\}$ cumpre

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + a_n) = \frac{40}{3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| - a_n) = \frac{20}{3}.$$

Calcula a suma de todos os números naturais m que cumpren a desigualdade

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \times a_{m+k} \right) > \frac{1}{700}.$$

(4 puntos)

30. Para as constantes a ($1 \leq a \leq 2$) e b , a función $f(x) = \sin(ax + b + \sin x)$ cumpre as condicións seguintes.

(a) $f(0) = 0$, $f(2\pi) = 2\pi a + b$.

(b) O menor número positivo t tal que $f'(0) = f'(t)$ é 4π .

Sexa A o conxunto de todos os valores α do intervalo aberto $(0, 4\pi)$ tales que a función $f(x)$ ten un máximo relativo en $x = \alpha$. Se n é o número de elementos do conxunto A e α_1 é o menor elemento de A , tense

$$n\alpha_1 - ab = \frac{q}{p}\pi.$$

Calcula $p + q$. (Aquí p e q son números naturais primos entre si.)

(4 puntos)

* Comprobación: comproba que escribiches (marcaches) correctamente o necesario nos espazos correspondentes da folia de respostas.
 o A continuación veñen as preguntas da materia optativa (Xeometría); comproba que é a materia que escolliches.

Clave oficial de respostas (KICE, caderno de tipo impar)

Parte común										
Pregunta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Resposta	(5)	(4)	(5)	(2)	(4)	(5)	(3)	(1)	(4)	(3)
Puntos	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4
Pregunta	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Resposta	(2)	(1)	(5)	(4)	(2)	7	33	96	41	36
Puntos	4	4	4	4	4	3	3	3	3	4
Pregunta	21	22								
Resposta	16	64								
Puntos	4	4								
Cálculo										
Pregunta	23	24	25	26	27	28	29	30		
Resposta	(3)	(4)	(2)	(1)	(1)	(2)	25	17		
Puntos	2	3	3	3	3	4	4	4		

[Nota: Clave oficial publicada polo KICE: https://suneung-files.hdh061224.workers.dev/kice-v1/2025_csath_math_a.pdf.]

Solucións

Todas as respostas coinciden coa clave oficial do KICE.

Parte común

Pregunta 1. $\sqrt[3]{5} \times 25^{1/3} = 5^{1/3} \cdot 5^{2/3} = 5$. **Resposta: (5).**

Pregunta 2. O límite é $f'(2)$; $f'(x) = 3x^2 - 8$, logo $f'(2) = 12 - 8 = 4$. **Resposta: (4).**

Pregunta 3. $a_n = k \cdot k^{n-1} = k^n$, así que $\frac{a_4}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} = k^2 + k = 30$, $(k+6)(k-5) = 0$ e, como $k > 0$, $k = 5$. **Resposta: (5).**

Pregunta 4. Só pode fallar a continuidade en $x = -2$: $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -10 + a$ e $f(-2) = 4 - a$. Igualando, $-10 + a = 4 - a$, $a = 7$. **Resposta: (2).**

Pregunta 5. $f'(x) = 2x(3x^2 - x) + (x^2 + 1)(6x - 1)$, logo $f'(1) = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 5 = 14$. **Resposta: (4).**

Pregunta 6. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta = -\frac{1}{5}$, logo $\sin \theta = \frac{1}{5}$ e

$$\frac{\sin \theta}{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\sin \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin \theta} = 5.$$

Resposta: (5).

Pregunta 7. Derivando (teorema fundamental do cálculo), $f(x) = 9x^2 + 2$, e $f(1) = 11$. **Resposta: (3).**

Pregunta 8. $2 \log 10^{-1/2} = -1$ e $\log_2 20 = 2 + \log_2 5$, logo $a = 1 + \log_2 5 = \log_2 10$. Entón $ab = \log_2 10 \cdot \log_{10} 2 = 1$. **Resposta: (1).**

Pregunta 9. A condición equivale a $\int_0^a f(x) dx = 0$: $[x^3 - 8x^2 - 20x]_0^a = a(a^2 - 8a - 20) = a(a - 10)(a + 2) = 0$. O número positivo é $a = 10$. **Resposta: (4).**

Pregunta 10. Con a, b naturais, o máximo de $a \cos bx + 3$ en $[0, 2\pi]$ é $a + 3$ (acádase en $x = 0$), logo $a + 3 = 13$, $a = 10$. Ademais, debe ser $\cos \frac{b\pi}{3} = 1$, é dicir, $\frac{b\pi}{3} = 2m\pi$, $b = 6m$. O mínimo é $b = 6$ e $a + b = 16$. **Resposta: (3).**

Pregunta 11. $v = x'(t) = 3t^2 - 3t - 6 = 3(t - 2)(t + 1)$, que cambia de signo (de negativo a positivo) en $t = 2$. A aceleración é $x''(t) = 6t - 3$, e $x''(2) = 9$. **Resposta: (2).**

Pregunta 12. Para $n = 1$: $\frac{a_1}{b_2} = \frac{1}{2}$, logo $b_2 = 4$; a diferenza é 2 e $b_n = 2n$. Restando as sumas para n e $n - 1$,

$$\frac{a_n}{b_{n+1}} = \frac{n^2 - (n-1)^2}{2} = \frac{2n-1}{2} \implies a_n = (2n-1)(n+1)$$

(válido tamén para $n = 1$). Entón $\sum_{k=1}^5 a_k = 2 + 9 + 20 + 35 + 54 = 120$. **Resposta: (1).**

Pregunta 13. $f(x) = (x-1)(x-2)(x-c)$ e $f'(0)$ é o coeficiente de x , $1 \cdot 2 + 1 \cdot c + 2 \cdot c = 2 + 3c$; logo $f'(0) = 2 + 3c = -7$ e $c = -3$:

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x+3) = x^3 - 7x + 6, \quad f(3) = 12, \quad P(3, 12).$$

A recta OP é $y = 4x$; $f(x) - 4x = x^3 - 11x + 6 = (x-3)(x^2 + 3x - 2)$, e a abscisa positiva de Q é $q = \frac{-3+\sqrt{17}}{2} \approx 0,56$. En $[0, q]$ a curva está por riba da recta e en $[q, 3]$ por debaixo, así que

$$B - A = \int_q^3 (4x - f(x))dx - \int_0^q (f(x) - 4x)dx = \int_0^3 (-x^3 + 11x - 6)dx = -\frac{81}{4} + \frac{99}{2} - 18 = \frac{45}{4}.$$

Resposta: (5).

Pregunta 14. Polo teorema dos senos, $\overline{BC} : \overline{AB} = \sin A : \sin C = 8 : 5$. Sexan $\overline{AB} = 5s$, $\overline{BC} = 8s$; entón $\overline{AD} = \overline{AE} = 3s$ (raio de O). A razón de áreas (mesmo ángulo A) é

$$\frac{\overline{AD} \cdot \overline{AE}}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} = \frac{9s^2}{5s \cdot \overline{AC}} = \frac{9}{35} \implies \overline{AC} = 7s.$$

Polo teorema do coseno, $\cos A = \frac{25 + 49 - 64}{70} = \frac{1}{7}$, $\sin A = \frac{4\sqrt{3}}{7}$; como $\frac{8s}{\sin A} = 2 \cdot 7$, $s = \sqrt{3}$. A área de ABC é $\frac{1}{2} \cdot 5s \cdot 7s \cdot \sin A = 30\sqrt{3}$ e a altura desde A sobre BC é $h = \frac{2 \cdot 30\sqrt{3}}{8\sqrt{3}} = \frac{15}{2}$. Como $3s = 3\sqrt{3} < h$, a circunferencia O non corta BC e a maior distancia dun punto de O á recta BC é $h + 3\sqrt{3}$. Logo

$$\text{Área máxima} = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \left(\frac{15}{2} + 3\sqrt{3} \right) = 36 + 30\sqrt{3}.$$

Resposta: (4).

Pregunta 15. Pola condición (a), $f(0) = 7$ e $f'(0) = 15$, logo $f(x) = px^2 + 15x + 7$ con $p < 0$. Os ceros de g' son: o vértice $x_0 = -\frac{15}{2p} > 0$ e as raíces non positivas de $3x^2 + 2ax + 15$ (produto $5 > 0$, polo que, se son reais, teñen o mesmo signo, e serán negativas se $a > 0$). Se Z é o conxunto de ceros de g' , as raíces de $g'(x)g'(x-4) = 0$ forman $Z \cup (Z+4)$.

- Se $Z = \{x_0\}$, hai só 2 raíces.
- Se $a = 3\sqrt{5}$, $Z = \{-\sqrt{5}, x_0\}$ e en xeral hai 4 raíces sen máis condicións (por iso se exclúe este caso).
- Se $Z = \{r_1, r_2, x_0\}$ con $r_1 < r_2 < 0$, hai 6 elementos salvo coincidencias, e fan falta exactamente dúas. Como $x_0 + 4 > x_0 > 0 > r_i$, as únicas coincidencias posíbeis son $r_1 + 4 = r_2$ e $r_2 + 4 = x_0$ (ou $r_1 + 4 = x_0$, incompatible coa anterior). De $r_1 r_2 = 5$ e $r_2 = r_1 + 4$: $r_1 = -5$, $r_2 = -1$, e entón $x_0 = 3$.

Así, $-\frac{2a}{3} = r_1 + r_2 = -6$, $a = 9$, e $-\frac{15}{2p} = 3$, $p = -\frac{5}{2}$; efectivamente $Z \cup (Z+4) = \{-5, -1, 3, 7\}$. Entón

$$g(-2) = -8 + 36 - 30 + 7 = 5, \quad g(2) = -10 + 30 + 7 = 27, \quad g(-2) + g(2) = 32.$$

Resposta: (2).

Pregunta 16. Dominio: $x > 3$. $\log_4(3x-5) = \frac{1}{2} \log_2(3x-5)$, logo $(x-3)^2 = 3x-5$, $x^2 - 9x + 14 = 0$, $x \in \{2, 7\}$. Só vale $\boxed{x=7}$.

Pregunta 17. $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + C$, $f(1) = 5 + C = 6$, $C = 1$; $f(2) = 24 + 8 + 1 = \boxed{33}$.

Pregunta 18. Agrupando os termos en parellas (a_n, a_{n+4}) con $n = 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12$, obtense $8 \cdot 12 = \boxed{96}$.

Pregunta 19. $f'(x) = 6x^2 - 6ax - 12a^2 = 6(x - 2a)(x + a)$; como $a > 0$, o máximo relativo está en $x = -a$: $f(-a) = -2a^3 - 3a^3 + 12a^3 = 7a^3 = \frac{7}{27}$, $a = \frac{1}{3}$. Entón $f(3) = 54 - 9 - 4 = \boxed{41}$.

Pregunta 20. De $\left(\frac{1}{5}\right)^{k-3} = k$ séguese $5^{3-k} = k$, é dicir, $5^k = \frac{125}{k}$, e $k^3 \cdot 5^{3k} = 125^3 = 5^9$. Hai que calcular $f(5^{-9})$. Como $k \approx 2,44 < 12$, $f(12) = \left(\frac{1}{5}\right)^9 = 5^{-9}$ e, pola condición, $f(5^{-9}) = f(f(12)) = 3 \cdot 12 = \boxed{36}$.

Pregunta 21. Se $f(\alpha) = 0$ para un real α con multiplicidade m , o límite só existe se $f(2x + 1)$ se anula en α con multiplicidade polo menos m , é dicir, se $2\alpha + 1$ é raíz de f de multiplicidade polo menos m . O conxunto finito de raíces reais é, polo tanto, pechado pola aplicación inxectiva $\alpha \mapsto 2\alpha + 1$; logo cada raíz é periódica, e a única órbita periódica desta aplicación é o punto fixo $\alpha = -1$. Así, -1 é a única raíz real de f . Reciprocamente, se é así a condición cúmprese: se $f(\alpha) \neq 0$ o límite é inmediato, e en $\alpha = -1$ os polinomios $f(2x + 1)$ e $f(x)$ teñen a mesma multiplicidade.

$f(-1) = 0 \Rightarrow b = a + 3$ e $f(x) = (x + 1)(x^2 + (a - 1)x + 4)$. O factor cuadrático non pode ter outras raíces reais: nin -1 como raíz dobre (o termo independente sería 1, non 4), nin -1 simple (daría $a = 6$ e $x^2 + 5x + 4 = (x + 1)(x + 4)$, coa raíz -4). Debe ser $(a - 1)^2 < 16$, $-3 < a < 5$. Como $f(1) = 2(a + 4)$, o máximo corresponde a $a = 4$, $b = 7$: $f(1) = \boxed{16}$.

Pregunta 22. Sexa $c = a_3$. Buscamos $|a_3| = |a_5|$:

- $|c|$ impar: $a_4 = c - 3$ (par), $a_5 = \frac{c-3}{2}$; $\left|\frac{c-3}{2}\right| = |c| \Rightarrow c = -3$ ou $c = 1$.
- $|c|$ par (ou 0) e $|a_4| = |c/2|$ impar: $a_5 = \frac{c}{2} - 3$; $\left|\frac{c}{2} - 3\right| = |c| \Rightarrow c = -6$ ou $c = 2$.
- $|c|$ e $|c/2|$ pares (ou 0): $a_5 = \frac{c}{4}$, e $\left|\frac{c}{4}\right| = |c| \Rightarrow c = 0$.

Os antecesoros de y son $2y$ (sempre) e $y + 3$ (só se y é par, pois entón $y + 3$ é impar). Construindo a_2 e a_1 e descartando os casos con $|a_1| = |a_3|$ ou $|a_2| = |a_4|$ (é dicir, $m = 1$ ou $m = 2$):

a_3	$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ válidas	descartadas
-3	—	$(-12, -6, -3, -6, -3), (-3, -6, -3, \dots)$
1	—	$(4, 2, 1, -2, -1), (5, 2, 1, -2, -1)$
-6	$(-24, -12, -6, -3, -6), (-9, -12, -6, -3, -6)$	$(-6, -3, -6, \dots)$
2	$(8, 4, 2, 1, -2), (7, 4, 2, 1, -2), (10, 5, 2, 1, -2)$	—
0	$(6, 3, 0, 0, 0)$	$(0, 0, 0, \dots), (3, 0, 0, \dots)$

Valores de $|a_1|$: 24, 9, 8, 7, 10, 6, cuxa suma é $\boxed{64}$ (comprobado por busca exhaustiva).

Cálculo

Pregunta 23. $\lim_{x \rightarrow 0} 3 \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 = 3$. **Resposta: (3).**

Pregunta 24. $\int_0^{10} \left(1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = 10 + \ln 11$. **Resposta: (4).**

Pregunta 25. De $\frac{na_n}{n^2+3} \rightarrow 1$ séguese $\frac{a_n}{n} \rightarrow 1$ (en particular $a_n > 0$ desde un termo en diante). Entón

$$\sqrt{a_n^2 + n} - a_n = \frac{n}{\sqrt{a_n^2 + n} + a_n} = \frac{1}{\sqrt{(a_n/n)^2 + 1/n} + a_n/n} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Resposta: (2).

Pregunta 26. A sección en x é un cadrado de lado $y(x)$, de área $\frac{x+1}{x(x+\ln x)}$. Como $(x+\ln x)' = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$,

$$V = \int_1^e \frac{(x+\ln x)'}{x+\ln x} dx = \left[\ln(x+\ln x) \right]_1^e = \ln(e+1) - \ln 1 = \ln(e+1).$$

Resposta: (1).

Pregunta 27. $g'(x) = e^x(f'(e^x) + 1)$. A tanxente en $(0, g(0))$ é o eixe x : $g(0) = f(1) + 1 = 0$ e $g'(0) = f'(1) + 1 = 0$. Como g é invertíbel e derivábel, $g' \geq 0$, é dicir, $f'(u) + 1 \geq 0$ para todo $u > 0$; o polinomio cuadrático $f'(u) + 1 = 3u^2 + \dots$ ten un cero en $u = 1$ interior a $(0, \infty)$, logo é un mínimo e $f'(u) + 1 = 3(u-1)^2$. Entón $f(u) + u = (u-1)^3$ (pois vale 0 en $u = 1$) e $g(x) = (e^x - 1)^3$. De $g(x) = 8$: $e^x = 3$, $x = \ln 3$, e $g'(\ln 3) = 3 \cdot 3 \cdot (3-1)^2 = 36$. Polo tanto $h'(8) = \frac{1}{g'(\ln 3)} = \frac{1}{36}$.

Resposta: (1).

Pregunta 28. $f''(x) = -1 - 2xe^{1-x^2} < 0$ para $x > 0$, polo que en $[0, t]$ a curva está por debaixo da tanxente e

$$g(t) = \int_0^t [f(t) + f'(t)(x-t) - f(x)] dx = tf(t) - \frac{t^2}{2}f'(t) - \int_0^t f(x) dx.$$

Derivando, $g'(t) = -\frac{t^2}{2}f''(t)$, logo $g'(1) = -\frac{1}{2}(-1-2) = \frac{3}{2}$. Integrando por partes, $f(1) - \int_0^1 f = \int_0^1 xf'(x) dx$, e como $f'(1) = 0$,

$$g(1) = \int_0^1 (-x^2 + xe^{1-x^2}) dx = -\frac{1}{3} + \frac{e-1}{2}.$$

Entón $g(1) + g'(1) = \frac{e}{2} + \frac{2}{3}$. **Resposta: (2).**

Pregunta 29. Sumando e restando, $\sum |a_n| = 10$ e $\sum a_n = \frac{10}{3}$. Con $a_n = ar^{n-1}$, $|r| < 1$: como as sumas difiren, $r < 0$; e $a > 0$ (se non, $\sum a_n$ sería negativa). Entón $\frac{a}{1-|r|} = 10$ e $\frac{a}{1+|r|} = \frac{10}{3}$, logo $|r| = \frac{1}{2}$, $r = -\frac{1}{2}$, $a = 5$.

Os signos $(-1)^{k(k+1)/2}$ repiten o ciclo $-, -, +, +$. Como a serie converxe absolutamente,

$$\sum_{k \geq 1} (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} a_{m+k} = a_m \sum_{k \geq 1} (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} r^k = a_m \cdot \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{a_m}{5} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}.$$

A desigualdade $\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1} > \frac{1}{700}$ esixe m impar e $2^{m-1} < 700$, é dicir, $m-1 \leq 9$: $m \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$, con suma 25.

Pregunta 30. $f(0) = \sin b = 0$ e $f(2\pi) = \sin(2\pi a + b) = 2\pi a + b$; como $\sin y = y$ só para $y = 0$, $b = -2\pi a \in [-4\pi, -2\pi]$, e $\sin b = 0$ obriga a que $b \in \{-2\pi, -3\pi, -4\pi\}$, é dicir, $a \in \{1, \frac{3}{2}, 2\}$.

$f'(x) = (a + \cos x) \cos(ax + b + \sin x)$ e $|f'(x)| \leq a + 1$, con igualdade só se $\cos x = 1$. Tense $f'(0) = (a + 1) \cos b$, que é o valor extremo $\pm(a + 1)$; polo tanto $f'(t) = f'(0)$ só pode ocorrer en $t = 2k\pi$, onde $f'(2k\pi) = (a + 1) \cos(2k\pi a + b)$.

- $a = 1, b = -2\pi$: $f'(2\pi) = 2 = f'(0)$; o menor t sería 2π . Non vale.
- $a = 2, b = -4\pi$: $f'(2\pi) = 3 = f'(0)$; tampouco vale.
- $a = \frac{3}{2}, b = -3\pi$: $f'(0) = -\frac{5}{2}$, $f'(2\pi) = \frac{5}{2} \cos 0 = \frac{5}{2} \neq f'(0)$ e $f'(4\pi) = \frac{5}{2} \cos 3\pi = -\frac{5}{2}$. Vale: o menor t é 4π .

Con $a = \frac{3}{2}, b = -3\pi$, sexa $\varphi(x) = \frac{3}{2}x - 3\pi + \sin x$; $\varphi'(x) = \frac{3}{2} + \cos x > 0$, polo que φ é estritamente crecente de $\varphi(0) = -3\pi$ a $\varphi(4\pi) = 3\pi$. Os máximos relativos de $f = \sin \varphi$ están onde $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2j\pi$, é dicir, $\varphi \in \{-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\}$: $n = 3$. O menor cumpre $\varphi(\alpha_1) = -\frac{3\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\alpha_1 + \sin \alpha_1 = \frac{3\pi}{2}$, cuxa única solución é $\alpha_1 = \pi$. Entón

$$n\alpha_1 - ab = 3\pi + \frac{9\pi}{2} = \frac{15}{2}\pi, \quad p + q = 2 + 15 = \boxed{17}.$$

5 Suíza

PISA 2025, matemáticas: 499 puntos

Dificultade relativa estimada: 5/10 (posto 12 dos 25 exames analizados; PAU de Galiza = 5)

Exame: Exame escrito de matemáticas da Maturidade (*Maturité gymnasiale*) do Lycée cantonal de Porrentruy (cantón do Jura), opcións específicas científicas

Nome orixinal: *Maturité gymnasiale, Session 2026 – Examen de mathématiques, OS scientifiques* (ficheiro MAS)

Ano e convocatoria: sesión 2026 (convocatoria final ordinaria)

Duración: 4 horas **Calculadora:** non gráfica e non programábel; permítese o formulario «Formulaires et Tables»

Estrutura e cualificación: 5 problemas (80 puntos en total: 15 + 20 + 15 + 15 + 15). A nota máxima (6, na escala suíza de 1 a 6) obtense con 75 puntos dos 80.

Contexto: En Suíza **non hai exame nacional** de acceso á universidade. O certificado de Maturidade (*Maturität / maturité / maturità*), recoñecido pola Confederación e os cantóns (regulamento RRM/ORM), dá acceso directo a todas as universidades e politécnicas federais (EPFZ/EPFL), agás en Medicina, onde as universidades xermanófonas aplican unha proba de aptitude. Os exames finais (escritos e orais) elabóraos e corríxeos cada centro (*Gymnasium, lycée, collège*) baixo supervisión cantonal, de modo que hai tantos exames como centros; só os candidatos sen escolarización nun centro recoñecido fan o exame federal de Maturidade (SEFRI). As matemáticas son materia obrigatoria de exame escrito; o nivel varía segundo a opción (aquí, a versión para os alumnos das opcións específicas científicas, «Física e aplicacións das matemáticas» e «Bioloxía e química»). Este exame é, polo tanto, só unha mostra representativa dun centro concreto, non un exame equivalente ao PAU en alcance territorial.

Fonte: https://www.lycee.ch/images/examens/2026/MAS_2026.pdf (páxina de exames anteriores: <https://www.lycee.ch/enseignement/anciens-examens>)

Instrucións

Tempo dispoñíbel: 4 horas.

Nota máxima (6) para 75 puntos de 80.

«Formularios e táboas» (*Formulaires et Tables*) dispoñíbeis.

Permítese calculadora non gráfica e non programábel.

Enunciados

Problema 1. Álgebra linear

(15 puntos)

Sexan $p \in \mathbb{R}$ un parámetro e h_p un endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ definido na base canónica pola matriz

$$M_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p & p+1 \end{pmatrix}.$$

1. Nesta parte tómase $p = 5$.

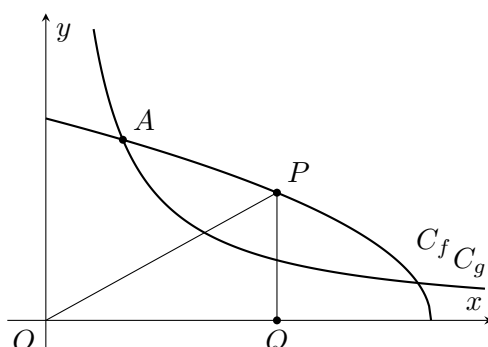
- Calcula a imaxe de $(2; -1)$ por h_5 .
- Calcula o punto $(x; y)$ que ten como imaxe $(3; 7)$ por h_5 .
- Calcula os valores propios e os subespazos propios asociados de h_5 .
- Dá unha base de vectores propios, así como a matriz D_5 de h_5 respecto desa base.

- e) Interpreta xeometricamente h_5 .
2. Nesta parte, p volve ser un número real calquera.
- a) Existe exactamente un valor de p para o cal M_p non é diagonalizábel. Determina ese valor e xustifica a resposta dada.
- b) Para ese valor de p , dá $(M_p)^n$ para $n > 1$.

Problema 2. Análise

(20 puntos)

As dúas partes deste exercicio son independentes.



A. Considéranse as funcións $f(x) = \sqrt{5-x}$ e $g(x) = \frac{2}{x}$. Denótanse por C_f e C_g as curvas representativas destas funcións.

1. Determina o dominio de definición da función f .
2. Comproba que o punto $A(1;2)$ está na intersección das curvas C_f e C_g .
3. Calcula o ángulo agudo que forman as curvas C_f e C_g no punto A .
4. Determina a ecuación da recta tanxente á curva C_f no punto A .
5. Calcula o volume do sólido xerado pola revolución da curva C_f arredor do eixe de abscisas entre as rectas verticais de ecuacións $x = 0$ e $x = 5$.
6. Sexa P un punto de abscisa x positiva situado na curva C_f e Q a súa proxección ortogonal sobre o eixe de abscisas. Determina a área máxima do triángulo POQ .

B. Resolve a ecuación diferencial $y'x = 2\sqrt{y} \ln(x)$.

(continúa no reverso)

Problema 3. Estudo de función

(15 puntos)

Estuda, sen a derivada segunda, e despois representa (unidade: 1 cm) a función f dada por

$$f(x) = \frac{2e^x}{3-x^2}.$$

Problema 4. Probabilidades**(15 puntos)**

Un sitio web propón todos os días 24 novas grellas de xogos solitarios: Sudoku, Kakuro e Binoxó (non importa aquí en que consisten estes xogos), segundo a distribución seguinte, así como o nivel de dificultade.

	fácil	difícil	total
Sudoku	5	7	12
Kakuro	3	4	7
Binoxó	2	3	5
total	10	14	24

Cada mañá, o señor Mouton enche 4 grellas ao chou. Afirmar que pasa unha xornada *tanoshii* cando enche 2 grellas de Sudoku, 1 grella de Kakuro e 1 grella de Binoxó.

- Para un día calquera, calcula a probabilidade dos seguintes sucesos.
A: o Sr. Mouton pasa unha xornada *tanoshii*. Demostra que $P(A) = \frac{5}{23}$.
B: o Sr. Mouton non enche ningunha grella de Kakuro.
C: o Sr. Mouton enche exactamente 2 grellas de Sudoku ou exactamente 2 grellas de Kakuro.
- Sabendo que o Sr. Mouton non encheu esta mañá ningunha grella de Kakuro, calcula a probabilidade de que enchese exactamente 2 grellas de Sudoku.
- O Sr. Mouton decide xogar cada un dos 7 días da semana, sempre segundo o mesmo protocolo: enche ao chou 4 grellas das 24 propostas cada día. Calcula entón a probabilidade dos seguintes sucesos.
D: pasa exactamente 3 xornadas *tanoshii* na semana.
E: pasa polo menos 2 xornadas *tanoshii* na semana.
- Cada tarde, a señora Mouton enche 2 grellas ao chou, procedentes do mesmo sitio web. Tarda 20 minutos en encher unha grella fácil, mentres que necesita 1 hora para encher unha grella difícil. Calcula o tempo medio que a Sra. Mouton pasa cada día enchendo esas 2 grellas.

Problema 5. Xeometría no espazo**(15 puntos)**

Nun sistema de referencia ortonormal do espazo, dánse os catro puntos $A(4; -1; 4)$, $B(2; -3; 5)$, $C(7; 5; -2)$ e $D(1; -7; -7)$, o plano $\pi: -4x + 6y + 4z + 7 = 0$ e a esfera de ecuación $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 12z + 46 = 0$.

- Determina unha ecuación cartesiana do plano (ABC) .
- Demuestra que o plano (ABC) é estritamente paralelo ao plano π .
- Dá unha representación paramétrica da recta d perpendicular ao plano (ABC) que pasa por D .
- Calcula as coordenadas do punto B' da recta d máis próximo ao punto B .
- Determina as coordenadas do centro Ω da esfera Σ , así como o seu raio.
- Demuestra que o punto B pertence á esfera Σ .
- Dá unha representación paramétrica da recta t tanxente á esfera Σ no punto B e que corta o eixe de abscisas.

Solucións

Problema 1. O polinomio característico de M_p é $\lambda^2 - (p+1)\lambda + p = (\lambda-1)(\lambda-p)$; os valores propios son sempre 1 e p , con vectores propios $(1; 1)$ para $\lambda = 1$ (pois $-x + y = 0$) e $(1; p)$ para $\lambda = p$ (pois $-px + y = 0$).

1. $p = 5$: $M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

a) $M_5 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -10-6 \end{pmatrix}$, $\boxed{h_5(2; -1) = (-1; -16)}$.

b) $\begin{cases} y = 3 \\ -5x + 6y = 7 \end{cases} \Rightarrow y = 3, x = \frac{11}{5}$. $\boxed{(x; y) = (\frac{11}{5}; 3)}$

c) $\det(M_5 - \lambda I) = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda-1)(\lambda-5)$: $\boxed{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5}$.
 $E_1 = \ker(M_5 - I) = \{(x; y) : y = x\} = \langle (1; 1) \rangle$; $E_5 = \ker(M_5 - 5I) = \{(x; y) : y = 5x\} = \langle (1; 5) \rangle$.

d) Base de vectores propios $\mathcal{B} = ((1; 1), (1; 5))$ e $D_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ (con $M_5 = PD_5P^{-1}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$).

e) h_5 deixa fixo cada punto da recta $y = x$ e multiplica por 5 os vectores da dirección $(1; 5)$: é unha **afinidade (estiramento oblicuo) de eixe a recta $y = x$, dirección $(1; 5)$ e razón 5**.

2.

a) Se $p \neq 1$, M_p ten dous valores propios distintos (1 e p) e é diagonalizábel. Se $p = 1$, o único valor propio é 1 (dobre) e $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \neq I$; o subespazo propio $E_1 = \langle (1; 1) \rangle$ ten dimensión $1 < 2$, logo non hai base de vectores propios. $\boxed{p = 1}$

b) $M_1 = I + N$ con $N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $N^2 = 0$. Como I e N conmutan, polo binomio de Newton $M_1^n = I + nN$:

$$\boxed{(M_1)^n = \begin{pmatrix} 1-n & n \\ -n & 1+n \end{pmatrix}}$$

(compróbase tamén por indución: $\begin{pmatrix} 1-n & n \\ -n & 1+n \end{pmatrix} M_1 = \begin{pmatrix} -n & n+1 \\ -n-1 & n+2 \end{pmatrix}$).

Problema 2. A.

1. $5 - x \geq 0$: $\boxed{D_f =] - \infty; 5]}$.

2. $f(1) = \sqrt{4} = 2$ e $g(1) = \frac{2}{1} = 2$, logo $A(1; 2) \in C_f \cap C_g$.

3. $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{5-x}}$, $f'(1) = -\frac{1}{4}$; $g'(x) = -\frac{2}{x^2}$, $g'(1) = -2$. O ángulo agudo θ entre as tanxentes verifica

$$\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| = \left| \frac{-\frac{1}{4} + 2}{1 + \frac{1}{2}} \right| = \frac{7}{6} \Rightarrow \boxed{\theta = \arctan \frac{7}{6} \approx 49,40^\circ}.$$

$$4. y - 2 = -\frac{1}{4}(x - 1): \quad \boxed{y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{4}}.$$

$$5. V = \pi \int_0^5 (5 - x) dx = \pi \left[5x - \frac{x^2}{2} \right]_0^5 = \boxed{\frac{25\pi}{2}} \approx 39,27.$$

$$6. P(x; \sqrt{5-x}), Q(x; 0), 0 < x < 5; \text{ o triángulo é rectángulo en } Q: \mathcal{A}(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{5-x}.$$

$$\mathcal{A}'(x) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{5-x} - \frac{x}{2\sqrt{5-x}} \right) = \frac{10-3x}{4\sqrt{5-x}} = 0 \iff x = \frac{10}{3}.$$

$$\mathcal{A}' > 0 \text{ en }]0; \frac{10}{3}[\text{ e } \mathcal{A}' < 0 \text{ en }]\frac{10}{3}; 5[: \text{ máximo absoluto. } \mathcal{A}_{\max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{3} \sqrt{\frac{5}{3}} = \boxed{\frac{5\sqrt{15}}{9}} \approx 2,15.$$

B. Para $x > 0$ e $y > 0$, separando variábeis:

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = \frac{\ln x}{x} dx \Rightarrow \sqrt{y} = \frac{(\ln x)^2}{2} + C \Rightarrow \boxed{y = \left(\frac{(\ln x)^2}{2} + C \right)^2, \quad C \in \mathbb{R}},$$

definida para os $x > 0$ con $\frac{(\ln x)^2}{2} + C \geq 0$ (xa que $\sqrt{y} \geq 0$). Ademais, $y = 0$ é unha solución singular. Comprobación: $y' = 2 \left(\frac{(\ln x)^2}{2} + C \right) \frac{\ln x}{x} = \frac{2\sqrt{y} \ln x}{x}$.

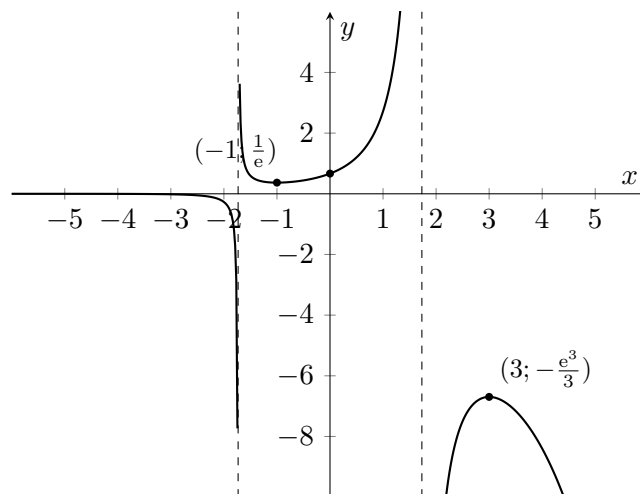
Problema 3. $f(x) = \frac{2e^x}{3-x^2}.$

- **Dominio:** $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$. Sen paridade nin periodicidade.
- **Cortes e signo:** non hai ceros ($e^x > 0$); $f(0) = \frac{2}{3}$. O signo é o de $3-x^2$: $f > 0$ en $]-\sqrt{3}; \sqrt{3}[$ e $f < 0$ en $] -\infty; -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}; +\infty[$.
- **Asíntotas verticais:** $x = -\sqrt{3}$, con $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}^-} f = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}^+} f = +\infty$; $x = \sqrt{3}$, con $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^-} f = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^+} f = -\infty$.
- **Comportamento no infinito:** $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^-$: asíntota horizontal $y = 0$ á esquerda (curva por debaixo). $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ (o exponencial domina): rama parabólica de dirección vertical.
- **Derivada:**

$$f'(x) = \frac{2e^x(3-x^2) + 2x \cdot 2e^x}{(3-x^2)^2} = \frac{2e^x(-x^2+2x+3)}{(3-x^2)^2} = \frac{-2e^x(x+1)(x-3)}{(3-x^2)^2}.$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$\sqrt{3}$	3	$+\infty$									
f'	$-$	$\parallel$	$-$	0	$+$	$\parallel$	$+$	0	$-$						
f	0^-	$\searrow$	$-\infty$	$\parallel$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$	$\parallel$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{e^3}{3}$	$\searrow$	$-\infty$

Mínimo relativo $(-1; \frac{1}{e}) \approx (-1; 0,37)$; máximo relativo $(3; -\frac{e^3}{3}) \approx (3; -6,70)$.



Problema 4. O espazo mostral son as $\binom{24}{4} = 10626$ eleccións equiprobábeis de 4 grellas (12 S, 7 K, 5 B).

$$1. P(A) = \frac{\binom{12}{2} \binom{7}{1} \binom{5}{1}}{\binom{24}{4}} = \frac{66 \cdot 7 \cdot 5}{10626} = \frac{2310}{10626} = \boxed{\frac{5}{23}} \approx 0,217.$$

$$P(B) = \frac{\binom{17}{4}}{\binom{24}{4}} = \frac{2380}{10626} = \boxed{\frac{170}{759}} \approx 0,224.$$

Sexan S_2 : «exactamente 2 S» e K_2 : «exactamente 2 K». $P(S_2) = \frac{66 \cdot 66}{10626}$, $P(K_2) = \frac{\binom{7}{2} \binom{17}{2}}{10626} = \frac{21 \cdot 136}{10626}$, $P(S_2 \cap K_2) = \frac{66 \cdot 21}{10626}$:

$$P(C) = \frac{4356 + 2856 - 1386}{10626} = \frac{5826}{10626} = \boxed{\frac{971}{1771}} \approx 0,548.$$

2. Se non hai ningunha K, a elección é de 4 grellas entre as 17 restantes (12 S, 5 B): $P(S_2 |$

$$B) = \frac{\binom{12}{2} \binom{5}{2}}{\binom{17}{4}} = \frac{660}{2380} = \boxed{\frac{33}{119}} \approx 0,277.$$

3. O número X de xornadas *tanoshii* na semana segue a lei binomial $\mathcal{B}(7; \frac{5}{23})$, pois os días son independentes:

$$P(D) = \binom{7}{3} \left(\frac{5}{23}\right)^3 \left(\frac{18}{23}\right)^4 \approx \boxed{0,135}, \quad P(E) = 1 - \left(\frac{18}{23}\right)^7 - 7 \cdot \frac{5}{23} \left(\frac{18}{23}\right)^6 \approx \boxed{0,471}.$$

4. Sexa F o número de grellas fáciles entre as 2 (10 fáciles, 14 difíciles): $P(F = 2) = \frac{45}{276}$, $P(F = 1) = \frac{140}{276}$, $P(F = 0) = \frac{91}{276}$. O tempo (min) é $T = 20F + 60(2 - F) = 120 - 40F$, con valores 40, 80, 120:

$$E(T) = \frac{40 \cdot 45 + 80 \cdot 140 + 120 \cdot 91}{276} = \frac{23920}{276} = \frac{260}{3} \approx 86,7 \text{ min},$$

é dicir, $\boxed{\approx 1 \text{ h } 26 \text{ min } 40 \text{ s}}$ (equivalentemente, $E(F) = 2 \cdot \frac{10}{24} = \frac{5}{6}$ e $E(T) = 120 - 40 \cdot \frac{5}{6}$).

Problema 5.

1. $\overrightarrow{AB} = (-2; -2; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (3; 6; -6)$, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (6; -9; -6) = 3(2; -3; -2)$. Plano $2x - 3y - 2z + d = 0$ por A : $8 + 3 - 8 + d = 0 \Rightarrow d = -3$.

$$\boxed{(ABC): 2x - 3y - 2z - 3 = 0}$$

2. O vector normal de π é $(-4; 6; 4) = -2(2; -3; -2)$: os planos son paralelos. Multiplicando (ABC) por -2 : $-4x + 6y + 4z + 6 = 0$, que difire de π no termo independente ($6 \neq 7$), logo non coinciden: son estritamente paralelos (p. ex. $A \notin \pi$: $-16 - 6 + 16 + 7 = 1 \neq 0$).
3. $d: (x; y; z) = (1; -7; -7) + \lambda(2; -3; -2), \lambda \in \mathbb{R}$.
4. B' é a proxección ortogonal de B sobre d : $\overrightarrow{DB'} = \lambda \vec{n}$, onde
 $\lambda = \frac{\overrightarrow{DB} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} = \frac{(1; 4; 12) \cdot (2; -3; -2)}{17} = \frac{-34}{17} = -2$. $B'(-3; -1; -3)$
5. $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 6)^2 = 9 + 4 + 36 - 46 = 3$: $\Omega(3; -2; 6), r = \sqrt{3}$.
6. $2^2 + (-3)^2 + 5^2 - 6 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) - 12 \cdot 5 + 46 = 38 - 84 + 46 = 0$, logo $B \in \Sigma$.
7. A tanxente en B é perpendicular ao raio $\overrightarrow{OB} = (-1; -1; -1)$. Se corta o eixe de abscisas en $I(s; 0; 0)$, a súa dirección é $\overrightarrow{BI} = (s - 2; 3; -5)$ e $\overrightarrow{BI} \cdot (1; 1; 1) = s - 2 + 3 - 5 = 0 \Rightarrow s = 4$. Polo tanto $I(4; 0; 0)$ e

$$t: (x; y; z) = (2; -3; 5) + \mu(2; 3; -5), \mu \in \mathbb{R}.$$

6 Reino Unido

PISA 2025, matemáticas: 488 puntos

Dificultade relativa estimada: 4/10 (posto 21 dos 25 exames analizados; PAU de Galiza = 5)

Exame: GCE A-level Mathematics (AQA, especificación 7357) — Paper 1 (matemática pura)

Nome orixinal: *A-level Mathematics, Paper 1* (código 7357/1), AQA (Assessment and Qualifications Alliance)

Ano e convocatoria: 2025, convocatoria de xuño (mércores 4 de xuño de 2025, sesión de tarde)

Duración: 2 horas **Calculadora:** si (gráfica ou científica que cumpra os requisitos da especificación); hai que ter o formulario oficial de AQA

Estrutura e cualificación: 17 preguntas obrigatorias, 100 puntos (*marks*) en total; as preguntas 1–4 son de escolla múltiple (1 punto cada apartado) e o resto de resposta aberta. O A-level Mathematics consta de **tres probas (*papers*) de 2 horas e 100 puntos cada unha**: en AQA, Paper 1 (pura), Paper 2 (pura e mecánica) e Paper 3 (pura e estatística); en Pearson Edexcel (9MA0), Paper 1 e Paper 2 (pura) e Paper 3 (estatística e mecánica).

Aquí tradúcese só o Paper 1, que é o máis próximo a Matemáticas II (análise, álgebra, trigonometría, sucesións).

Contexto: No Reino Unido (Inglaterra, Gales e Irlanda do Norte) non hai unha proba de acceso única: as universidades admiten segundo as cualificacións (A*–E) de 3 ou 4 materias de A-level, cursadas nos dous últimos anos de secundaria (16–18 anos). As probas elabóranas varias entidades privadas acreditadas (AQA, Pearson Edexcel, OCR...) sobre un contido común fixado polo goberno. Escocia ten un sistema propio (*Highers*).

Fonte: <https://pmt.physicsandmathstutor.com/download/Maths/A-level/Papers/AQA/Paper-1/QP/June2025QP.pdf> (reproducción do caderno oficial de AQA; criterios de corrección no mesmo sitio, cartafol MS)

Instrucións

Material. Debes ter o folleto *AQA Formulae for A-level Mathematics* (formulario). Deberías ter unha calculadora gráfica ou científica que cumpra os requisitos da especificación.

Instrucións.

- Usa tinta negra ou bolígrafo negro. O lapis só se debe usar para debuxar.
- Enche os recadros da parte superior desta páxina.
- Responde todas as preguntas.
- Debes responder cada pregunta no espazo reservado para ela.
- Amosa todos os cálculos necesarios; en caso contrario poderías perder puntos polo método.
- Fai todo o traballo en sucio neste caderno. Risca calquera traballo que non queiras que se corrixa.

Información. A puntuación de cada pregunta indícase entre corchetes. A puntuación máxima desta proba é 100.

Consello. Salvo indicación en contra, podes citar fórmulas do folleto sen demostralas. Non tes por que usar todo o espazo proporcionado.

Enunciados

[Nota: Nas preguntas de escolla múltiple o orixinal di “Rodea a túa resposta” (Circle your answer).

Puntuacións en marks.

1. A ecuación dunha curva vén dada por $y = 3e^x$. Acha unha expresión para $\frac{dy}{dx}$. Rodea a túa resposta. **(1 punto)**

(A) $3e^{-x}$
 (B) $3e$
 (C) $3e^x$
 (D) $3xe^{x-1}$

2. Unha sucesión defínese mediante

$$x_{n+1} = -\frac{1}{4}x_n \quad \text{con } x_1 = 32.$$

Os catro primeiros termos son 32, -8 , 2, $-0,5$. Cal das seguintes se pode usar para describir esta sucesión? Rodea a túa resposta. **(1 punto)**

(A) Converxente
 (B) Decrecente
 (C) Crecente
 (D) Periódica

3. Expresa $\log_3 2x - \log_3 x$ como un único logaritmo. Rodea a túa resposta. **(1 punto)**

(A) $\log_3 \frac{1}{2}$
 (B) $\log_3 2$
 (C) $\log_3 x$
 (D) $\log_3 2x^2$

4. Os tres primeiros termos, en potencias ascendentes de x , do desenvolvemento binomial de $(1 - 8x)^{\frac{1}{2}}$ son

$$1 + nx - 8x^2$$

onde n é unha constante.

- (a) Indica o intervalo de valores de x para os que o desenvolvemento é válido. Rodea a túa resposta. **(1 punto)**

(A) $|x| > -8$
 (B) $|x| > -\frac{1}{8}$
 (C) $|x| < \frac{1}{8}$
 (D) $|x| < 8$

- (b) Indica o valor da constante n . Rodea a túa resposta. **(1 punto)**

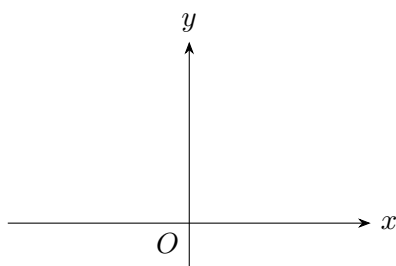
(A) -16
 (B) -4
 (C) $\frac{1}{2}$
 (D) 4

5. Calcula **(3 puntos)**

$$\int \left(4x - 3 + x^{-\frac{1}{2}} \right) dx$$

6. Unha serie aritmética ten primeiro termo 3 e diferenza $-0,5$. Acha a suma dos 250 primeiros termos. **(2 puntos)**

7. Sábese que $0 < a < 1$. Esboza a gráfica de ecuación $y = a^x$ nos eixes seguintes. **(2 puntos)**



8. Demostra que, para valores pequenos de x , a gráfica de ecuación

$$y = \frac{4 + \sin 5x - 3 \cos 2x}{1 + 2 \tan x}$$

pode aproximarse pola recta de ecuación da forma

$$y = ax + 1$$

onde a é unha constante que hai que achar.

(5 puntos)

9. (a) Unha serie xeométrica, S , ten segundo termo 60. A razón de S é 0,2. Acha o valor exacto da suma dos cinco primeiros termos de S . **(4 puntos)**
- (b) Outra serie xeométrica, T , ten segundo termo 60 e razón positiva r . A suma infinita de T é T_∞ .

- (i) Demostra que

(2 puntos)

$$T_\infty = \frac{60}{r - r^2}$$

- (ii) Acha o valor máximo de $r - r^2$.

(2 puntos)

- (iii) Deduce, a partir do anterior, o conxunto de valores posíbeis de T_∞ . Xustifica completamente a túa resposta. **(2 puntos)**

10. Un investigador que traballa para un fabricante de alimentos conxelados usa a fórmula

$$\theta = 21 - Ae^{-kt}$$

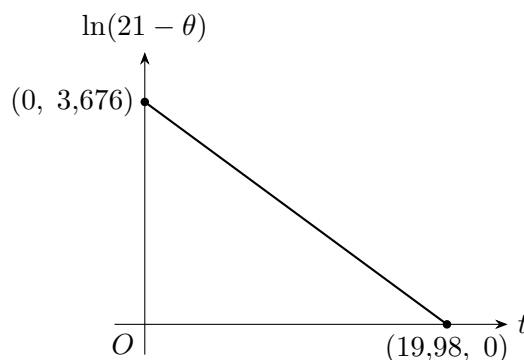
para modelizar a temperatura dunha sobremesa unha vez que se saca do conxelador.

- (a) Amosa como se pode reordenar $\theta = 21 - Ae^{-kt}$ para obter

(3 puntos)

$$\ln(21 - \theta) = -kt + \ln A$$

- (b) O investigador usa medicións que rexistrou para representar a gráfica de $\ln(21 - \theta)$ fronte a t , como se mostra no diagrama seguinte.



- (i) Usa a información da gráfica para achar o valor de A . Dá a resposta con tres cifras significativas. **(2 puntos)**
- (ii) Usa a información da gráfica para achar o valor de k . Dá a resposta con tres cifras significativas. **(2 puntos)**
- (iii) Acha a temperatura da sobremesa no momento en que se saca do conxelador. Dá a resposta con tres cifras significativas. **(2 puntos)**
- (c) A sobremesa está lista para comer cando a súa temperatura chega a 4°C . Usa o modelo para determinar o tempo, despois de sacala do conxelador, que tarda a sobremesa en chegar a esta temperatura. Dá a resposta arredondada aos 10 minutos máis próximos. **(3 puntos)**

11. A ecuación dunha curva é

$$x^2y + 4y^3 = 8x$$

A curva ten dous puntos estacionarios.

- (a) Usa a derivación implícita para demostrar que nos puntos estacionarios **(4 puntos)**

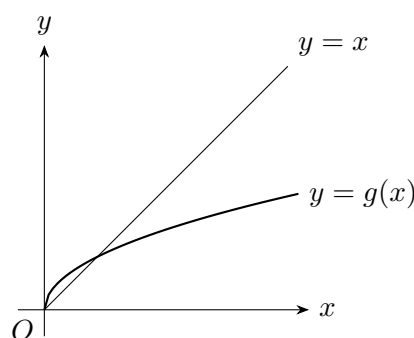
$$y = \frac{4}{x}$$

- (b) A partir do anterior, demostra que as abscisas dos puntos estacionarios se poden escribir na forma $\pm\sqrt{n}$, onde n é un enteiro que hai que achar. **(3 puntos)**

12. As funcións f e g defínense por

$$f(x) = x^2 + 5, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad g(x) = \sqrt{x}, \quad x \geq 0$$

- (a) Usando notación de conxuntos, indica o percorrido (ímaxe) de f . **(2 puntos)**
- (b) Determina se f ten inversa. Xustifica completamente a túa resposta. **(2 puntos)**
- (c) A gráfica de $y = g(x)$ e a recta $y = x$ móstranse no diagrama seguinte.



- Esboza a gráfica de $y = g^{-1}(x)$ no diagrama. **(2 puntos)**
- (d) A función composta gf denótase por h .
 - (i) Escribe unha expresión para $h(x)$. **(1 punto)**
 - (ii) Indica o percorrido de h . **(1 punto)**

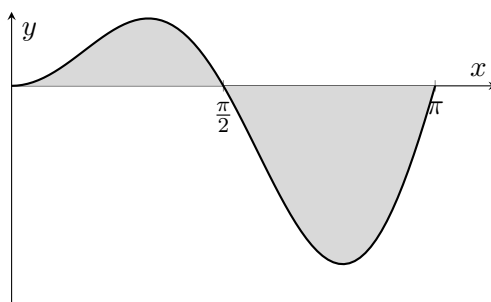
13. Unha curva C ten as ecuacións paramétricas

$$x = 4(4t + 1)^2, \quad y = e^{-4t} \quad \text{para} \quad -\frac{1}{4} \leq t \leq 0$$

- (a) Acha $\frac{dy}{dx}$ en función de t . **(3 puntos)**
- (b) Acha unha ecuación da recta tanxente a C no punto onde $t = 0$. **(3 puntos)**

- (c) Acha unha ecuación cartesiana de C na forma $y = f(x)$. Xustifica completamente a túa resposta. **(3 puntos)**

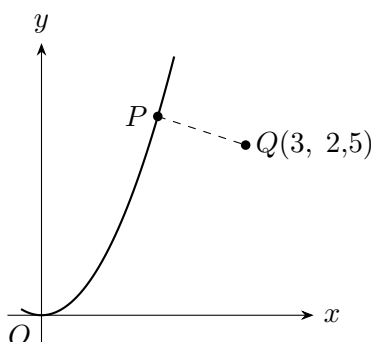
14. A gráfica de $y = 4x \sin 2x$ para $0 \leq x \leq \pi$ móstrase a continuación.



Demostra que a área sombreada, limitada polo eixe x e a curva, é $k\pi$, onde k é un enteiro que hai que achar. Xustifica completamente a túa resposta. **(8 puntos)**

[Nota: Na figura, as dúas rexións (por riba e por debaixo do eixe x) están sombreadas.]

15. Unha curva ten ecuación $y = x^2$. O punto Q ten coordenadas $(3, 2,5)$. O punto P da curva que está máis preto do punto Q móstrase no diagrama seguinte.



- (a) Demostra que a abscisa de P satisfai a ecuación **(4 puntos)**

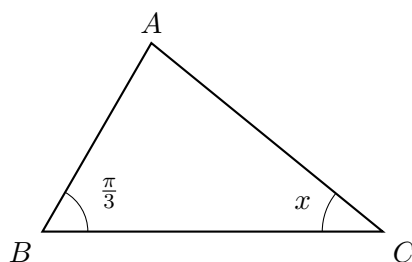
$$2x^3 - 4x - 3 = 0$$

- (b) Vaise usar o método de Newton–Raphson para achar unha solución aproximada da ecuación $2x^3 - 4x - 3 = 0$. Demostra que o método de Newton–Raphson xera a fórmula iterativa **(4 puntos)**

$$x_{n+1} = \frac{4x_n^3 + 3}{6x_n^2 - 4}$$

- (c) Comezando con $x_0 = 3$, usa a fórmula iterativa do apartado (b) para achar o valor de x_3 . Dá a resposta con tres cifras decimais. **(2 puntos)**
- (d) A partir do anterior, acha a distancia PQ . Dá a resposta con dúas cifras decimais. **(2 puntos)**

16. O triángulo ABC móstrase no diagrama seguinte. O ángulo ABC mide $\frac{\pi}{3}$ radiáns. O ángulo BCA mide x radiáns.



(a) Explica por que o ángulo $BAC = \frac{2\pi}{3} - x$. (1 punto)

(b) (i) Usa o teorema dos senos para demostrar que (5 puntos)

$$\frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{3} \cot x + p}{q}$$

onde p e q son enteiros.

(ii) A partir do anterior, indica o valor exacto de x cando $\frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$. (1 punto)

17. (a) Usa a substitución $u = e^x + 1$ para demostrar que (5 puntos)

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx = e^x - \ln(e^x + 1) + k$$

(b) Resolve a ecuación diferencial

$$\left(\frac{e^x + 1}{e^{2x}} \right) \frac{dy}{dx} = \cos^2 y$$

sabendo que $y = \pi$ cando $x = 0$. Escribe a resposta na forma

$$\tan y = e^x + \ln \left(\frac{A}{e^x + 1} \right) + B$$

onde A e B son constantes que hai que achar. (5 puntos)

[Nota: FIN DA PROBA.]

Solucións

Pregunta 1. $\frac{d}{dx}(3e^x) = 3e^x$, porque e^x é a súa propia derivada. **Resposta:** (C) $3e^x$.

Pregunta 2. É xeométrica de razón $-\frac{1}{4}$, con $|\frac{1}{4}| < 1$, así que $x_n = 32 \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \rightarrow 0$. Os termos alternan de signo, logo non é crecente nin decrecente, e tampouco periódica. **Resposta:** (A) converxente.

Pregunta 3. $\log_3 2x - \log_3 x = \log_3 \frac{2x}{x} = \log_3 2$. **Resposta:** (B).

Pregunta 4. a) $(1+z)^{1/2}$ desenvólvese para $|z| < 1$; con $z = -8x$: $|8x| < 1 \iff |x| < \frac{1}{8}$.
Resposta: (C).

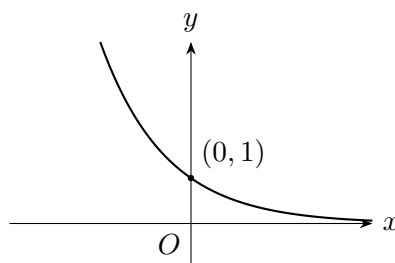
b) $(1-8x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}(-8x) + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2}(-8x)^2 + \dots = 1 - 4x - 8x^2 + \dots$, logo $n = -4$. **Resposta: (B).**

Pregunta 5.

$$\int (4x - 3 + x^{-1/2}) dx = \boxed{2x^2 - 3x + 2x^{1/2} + c}$$

Pregunta 6. $S_{250} = \frac{250}{2}(2 \cdot 3 + 249 \cdot (-0,5)) = 125(6 - 124,5) = \boxed{-14812,5}$.

Pregunta 7. Como $0 < a < 1$, a función $y = a^x$ é estritamente decrecente e positiva; corta o eixe y en $(0, 1)$, tende a $+\infty$ cando $x \rightarrow -\infty$ e ten asíntota horizontal $y = 0$ cando $x \rightarrow +\infty$ (exemplo debuxado: $a = \frac{1}{2}$).



Pregunta 8. Para x pequeno: $\sin 5x \approx 5x$, $\cos 2x \approx 1 - \frac{(2x)^2}{2} = 1 - 2x^2$, $\tan x \approx x$. Entón

$$y \approx \frac{4 + 5x - 3 + 6x^2}{1 + 2x} = \frac{6x^2 + 5x + 1}{1 + 2x} = \frac{(1 + 2x)(1 + 3x)}{1 + 2x} = 1 + 3x.$$

Logo a gráfica aproxímase pola recta $y = 3x + 1$: $\boxed{a = 3}$. (O desenvolvemento de Taylor confirma $y = 1 + 3x + O(x^2)$.)

Pregunta 9. a) Primeiro termo $a = 60/0,2 = 300$. Entón

$$S_5 = \frac{300(1 - 0,2^5)}{1 - 0,2} = 375(1 - 0,00032) = \boxed{374,88 = \frac{9372}{25}}$$

b) (i) O primeiro termo é $a = \frac{60}{r}$. Para que exista a suma infinita, $|r| < 1$ (aquí $0 < r < 1$), e

$$T_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{60/r}{1-r} = \frac{60}{r(1-r)} = \frac{60}{r-r^2}.$$

(ii) $r - r^2 = \frac{1}{4} - (r - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}$, con igualdade en $r = \frac{1}{2}$. Valor máximo: $\boxed{\frac{1}{4}}$.

(iii) Para $0 < r < 1$ temos $0 < r - r^2 \leq \frac{1}{4}$, e $r - r^2 \rightarrow 0^+$ cando $r \rightarrow 0^+$ ou $r \rightarrow 1^-$. Como $s \mapsto 60/s$ é decrecente para $s > 0$, $T_\infty \geq 60/\frac{1}{4} = 240$, alcanzándose en $r = \frac{1}{2}$, e T_∞ toma valores arbitrariamente grandes (por continuidade, todos os valores ≥ 240):

$$\boxed{\{T_\infty : T_\infty \geq 240\} = [240, \infty)}$$

Pregunta 10. a) $\theta = 21 - Ae^{-kt} \Rightarrow 21 - \theta = Ae^{-kt}$. Como ambos os membros son positivos, tomando logaritmos neperianos: $\ln(21 - \theta) = \ln A + \ln e^{-kt} = -kt + \ln A$.

b) (i) A ordenada na orixe é $\ln A = 3,676$, logo $A = e^{3,676} = 39,488 \dots \Rightarrow \boxed{A \approx 39,5}$.

(ii) A pendente é $-k = \frac{0 - 3,676}{19,98 - 0}$, logo $k = \frac{3,676}{19,98} = 0,18398 \dots \Rightarrow \boxed{k \approx 0,184}$.

(iii) En $t = 0$: $\theta = 21 - A = 21 - 39,488 = \boxed{-18,5^\circ \text{C}}$.

c) $4 = 21 - Ae^{-kt} \Rightarrow e^{-kt} = \frac{17}{A} \Rightarrow t = \frac{\ln A - \ln 17}{k} = \frac{3,676 - 2,8332}{0,18398} = 4,581 \dots$ horas $\approx 274,8$ min, isto é, $\boxed{t \approx 270 \text{ minutos (4 h 30 min)}}$.

[Nota: Supoñemos que t se mide en horas, que é a única interpretación coherente coa petición de arredondar aos 10 minutos (con t en minutos saírían 4,6 minutos).]

Pregunta 11. a) Derivando implicitamente $x^2y + 4y^3 = 8x$:

$$2xy + x^2 \frac{dy}{dx} + 12y^2 \frac{dy}{dx} = 8 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{8 - 2xy}{x^2 + 12y^2}.$$

Nos puntos estacionarios $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 8 - 2xy = 0 \Rightarrow xy = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{x}$ (o denominador non se anula, pois $x \neq 0$).

b) Substituíndo $y = 4/x$ na ecuación da curva:

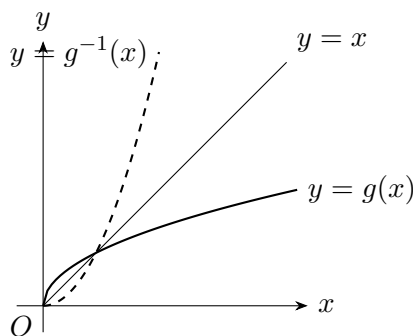
$$x^2 \cdot \frac{4}{x} + 4 \cdot \frac{64}{x^3} = 8x \Rightarrow \frac{256}{x^3} = 4x \Rightarrow x^4 = 64 \Rightarrow x^2 = 8 \quad (x^2 > 0).$$

Logo $x = \pm\sqrt{8}$, $\boxed{n = 8}$. (Os puntos son $(\sqrt{8}, \sqrt{2})$ e $(-\sqrt{8}, -\sqrt{2})$.)

Pregunta 12. a) Como $x^2 \geq 0$ con mínimo 0 en $x = 0$: $\boxed{\{y \in \mathbb{R} : y \geq 5\}}$ (ou $\{f(x) : f(x) \geq 5\}$).

b) f non é inxectiva: $f(1) = f(-1) = 6$, de modo que a 6 lle corresponderían dous orixinais. Como f é “moitos a un”, **non ten inversa**.

c) $g^{-1}(x) = x^2$, $x \geq 0$: é a reflexión da gráfica de g respecto da recta $y = x$ (rama de parábola desde a orixe, que corta a $y = g(x)$ en $(0, 0)$ e $(1, 1)$).



d) (i) $h(x) = g(f(x)) = \boxed{\sqrt{x^2 + 5}}$, $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Como $x^2 + 5 \geq 5$ e $\sqrt{}$ é crecente: $\boxed{h(x) \geq \sqrt{5}}$.

Pregunta 13. a) $\frac{dx}{dt} = 8(4t+1) \cdot 4 = 32(4t+1)$, $\frac{dy}{dt} = -4e^{-4t}$, logo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4e^{-4t}}{32(4t+1)} = \boxed{-\frac{e^{-4t}}{8(4t+1)}}$$

b) En $t = 0$: $x = 4$, $y = 1$, pendente $-\frac{1}{8}$. Tanxente: $y - 1 = -\frac{1}{8}(x - 4)$, isto é, $\boxed{x + 8y = 12}$ ($y = -\frac{1}{8}x + \frac{3}{2}$).

c) $(4t+1)^2 = \frac{x}{4} \Rightarrow 4t+1 = \pm \frac{\sqrt{x}}{2}$. Como $-\frac{1}{4} \leq t \leq 0$, temos $0 \leq 4t+1 \leq 1$, polo que se colle o signo positivo: $4t+1 = \frac{\sqrt{x}}{2}$, de onde $-4t = 1 - \frac{\sqrt{x}}{2}$. Así

$$\boxed{y = e^{1 - \frac{\sqrt{x}}{2}}}, \quad 0 \leq x \leq 4.$$

Pregunta 14. Por partes ($u = 4x$, $dv = \sin 2x \, dx$):

$$\int 4x \sin 2x \, dx = -2x \cos 2x + \int 2 \cos 2x \, dx = -2x \cos 2x + \sin 2x + c =: F(x) + c.$$

En $[0, \pi]$, $\sin 2x \geq 0$ en $[0, \frac{\pi}{2}]$ e $\sin 2x \leq 0$ en $[\frac{\pi}{2}, \pi]$; a curva corta o eixe en $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$. Con $F(0) = 0$, $F(\frac{\pi}{2}) = -\pi \cos \pi = \pi$, $F(\pi) = -2\pi$:

$$\int_0^{\pi/2} 4x \sin 2x \, dx = \pi, \quad \int_{\pi/2}^{\pi} 4x \sin 2x \, dx = -2\pi - \pi = -3\pi.$$

A rexión inferior ten área 3π , así que a área sombreada total é $\pi + 3\pi = 4\pi$: $\boxed{k = 4}$.

Pregunta 15. a) Para un punto (x, x^2) da curva, $D(x) = PQ^2 = (x-3)^2 + (x^2-2,5)^2$. P minimiza D , logo $D'(x) = 0$:

$$D'(x) = 2(x-3) + 4x(x^2-2,5) = 4x^3 - 8x - 6 = 0 \iff 2x^3 - 4x - 3 = 0.$$

b) Con $f(x) = 2x^3 - 4x - 3$, $f'(x) = 6x^2 - 4$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2x_n^3 - 4x_n - 3}{6x_n^2 - 4} = \frac{6x_n^3 - 4x_n - 2x_n^3 + 4x_n + 3}{6x_n^2 - 4} = \frac{4x_n^3 + 3}{6x_n^2 - 4}.$$

c) $x_1 = \frac{111}{50} = 2,22$, $x_2 = 1,82884\dots$, $x_3 = 1,70945\dots \Rightarrow \boxed{x_3 \approx 1,709}$ (a raíz é $1,69805\dots$).

d) $P \approx (1,709; 2,922)$ e $PQ = \sqrt{(1,709-3)^2 + (2,922-2,5)^2} = 1,3578\dots \Rightarrow \boxed{PQ \approx 1,36}$.

Pregunta 16. a) Os ángulos dun triángulo suman π : $\hat{BAC} = \pi - \frac{\pi}{3} - x = \frac{2\pi}{3} - x$.

b) (i) Polo teorema dos senos, BC oponse a A e AB oponse a C :

$$\frac{BC}{AB} = \frac{\sin(\frac{2\pi}{3} - x)}{\sin x} = \frac{\sin \frac{2\pi}{3} \cos x - \cos \frac{2\pi}{3} \sin x}{\sin x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x}{\sin x} = \frac{\sqrt{3} \cot x + 1}{2},$$

logo $\boxed{p = 1, q = 2}$.

(ii) $\frac{\sqrt{3} \cot x + 1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \Rightarrow \cot x = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4}}$ (válido, pois $0 < x < \frac{2\pi}{3}$).

Pregunta 17. a) $u = e^x + 1 \Rightarrow du = e^x dx$ e $e^x = u - 1$. Así $e^{2x} dx = e^x \cdot e^x dx = (u - 1) du$ e

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx = \int \frac{u - 1}{u} du = \int \left(1 - \frac{1}{u}\right) du = u - \ln u + c = e^x + 1 - \ln(e^x + 1) + c = e^x - \ln(e^x + 1) + k,$$

con $k = c + 1$ (e $u > 0$, polo que non fai falta valor absoluto).

b) Separando variábeis (con $\cos y \neq 0$):

$$\frac{1}{\cos^2 y} dy = \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx \Rightarrow \tan y = e^x - \ln(e^x + 1) + c.$$

Con $x = 0$, $y = \pi$: $0 = 1 - \ln 2 + c \Rightarrow c = \ln 2 - 1$. Logo

$$\tan y = e^x + \ln\left(\frac{2}{e^x + 1}\right) - 1, \quad \boxed{A = 2, B = -1}.$$

7 Polonia

PISA 2025, matemáticas: 484 puntos

Dificultade relativa estimada: 5,5/10 (posto 11 dos 25 exames analizados; PAU de Galiza = 5)

Exame: Egzamin maturalny (fórmula 2023) — Matemáticas, nivel ampliado

Nome orixinal: *Egzamin maturalny. Matematyka. Poziom rozszerzony* (Exame de madurez. Matemáticas. Nivel ampliado), folla MMAP-R0-100-2605

Ano e convocatoria: 2026, convocatoria principal de maio (11 de maio de 2026)

Duración: 180 minutos **Calculadora:** só calculadora simple (ademais de compás, regra e o folleto oficial *Wybrane wzory matematyczne*, «Fórmulas matemáticas seleccionadas»)

Estrutura e cualificación: 12 tarefas (a última con dous apartados), todas de resposta aberta; 50 puntos en total.

Contexto: A *matura* é o exame estatal de fin do ensino secundario, elaborado pola Comisión Central de Exames (CKE). As matemáticas de nivel básico son obrigatorias para todos; o nivel ampliado (*rozszerzony*) é optativo e é o que existen as universidades para carreiras científicas, técnicas e económicas, que ordenan aos candidatos segundo a porcentaxe obtida.

Fonte: <https://cke.gov.pl>; <https://fhbkobuhipsjzpbdsmpu.supabase.co/storage/v1/object/public/cke-archive/matura-rozszerzona/matematyka/2026-maj-matura-rozszerzona/arkusz.pdf>

Instrucións para a persoa examinada

1. Comproba que a folla de exame ten 33 páxinas (tarefas 1–12).
2. Na primeira páxina da folla e na folla de respostas escribe o teu número PESEL e pega o adhesivo co código.
3. Lembra que omitir a argumentación ou cálculos esenciais na resolución dunha tarefa pode facer que non obteñas a puntuación completa por esa resolución.
4. Escribe as resolucións e as respostas no lugar destinado para iso.
5. Escribe de forma lexíbel e usa só bolígrafo ou pluma con tinta negra.
6. Non uses corrector; risca claramente o que estea mal escrito.
7. Non escribas ningún signo nas táboas destinadas ao examinador.
8. Lembra que o escrito no borrador non será avaliado.
9. Podes empregar as *Fórmulas matemáticas seleccionadas*, compás e regra, así como calculadora simple.

[Nota: Na folla orixinal a puntuación de cada tarefa indícase como «(0–n)». Aquí escríbese como «n puntos».]

Enunciados

1. (2 puntos)
Calcula o límite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\binom{n+2}{n-1}}{\frac{1}{2}n^3 - 4n + 7}.$$

Escribe os cálculos.

2. (3 puntos)

Do conxunto de oito números $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ extraemos sen reposición, oito veces, un número cada vez. Os números extraídos colócanse formando unha sucesión segundo a orde de extracción.

Calcula a probabilidade do suceso A consistente en que os números extraídos formen unha sucesión na que o produto de cada tres termos consecutivos sexa un número divisíbel por 3. Dá o resultado en forma de fracción irredutíbel. Escribe os cálculos.

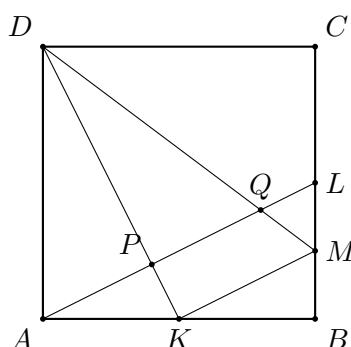
3. (3 puntos)

Demostra que para todo número real positivo x e para todo número real positivo y se verifica a desigualdade

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}.$$

4. (3 puntos)

Os puntos K e L son os puntos medios, respectivamente, dos lados AB e BC do cadrado $ABCD$ de lado a . O punto M é o punto do lado BC tal que os segmentos DK e KM son perpendiculares. O segmento AL corta os segmentos DK e DM nos puntos P e Q , respectivamente (ver a figura).



Demostra que $|PQ| = \frac{\sqrt{5}}{5} a$.

5. (4 puntos)

Resolve a inecuación

$$|2x - 6| - |x^2 - 9| < 0.$$

Escribe os cálculos.

6. (4 puntos)

Dáse unha progresión aritmética (a_n) cun número finito de termos. O número de termos desta progresión é maior ca 6. O primeiro termo desta progresión é igual a 1, e o último termo é igual a (-2025) . O segundo, o terceiro e o sexto termos desta progresión forman, nesa orde, unha progresión xeométrica.

Calcula a suma de todos os termos da progresión (a_n) . Escribe os cálculos.

7. (4 puntos)

Resolve a ecuación

$$\sin(6x) - 2\sin(2x) = 0.$$

Escribe os cálculos.

8. (4 puntos)

Na pirámide regular triangular $ABCS$ a base ABC é un triángulo equilátero. A lonxitude da circunferencia circunscrita á base ABC é igual a $6\sqrt{2}\pi$, e o coseno do ángulo entre as arestas laterais SB e SC é igual a $\frac{5}{9}$.

Calcula a lonxitude da aresta da base ABC e o coseno do ángulo entre as caras laterais SAC e SBC desta pirámide. Escribe os cálculos.

9. (5 puntos)

No sistema de coordenadas cartesianas (x, y) os puntos $A = (1, -1)$ e $B = (4, 0)$ son vértices do triángulo ABC , no que $|CA| = |CB|$. Un dos lados iguais do triángulo ABC está contido na recta de ecuación $x + 2y - 4 = 0$. No lado AC deste triángulo tomouse un punto M tal que $|AM| : |MC| = 1 : 4$.

Determina a ecuación da circunferencia que ten o centro no punto M e pasa polo punto C . Escribe os cálculos.

10. (5 puntos)

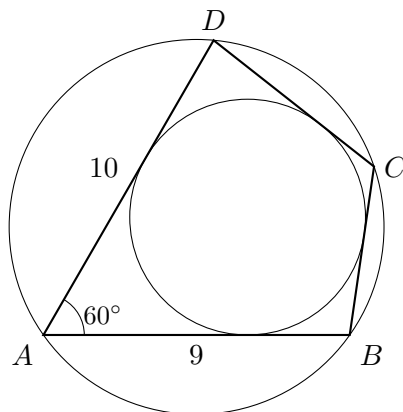
Determina todos os valores reais do parámetro m , onde $m \neq 0$, para os que a función cuadrática f definida pola fórmula

$$f(x) = m^2 \cdot x^2 - 2mx - m + 1$$

ten dous ceros distintos x_1 e x_2 pertencentes ao intervalo $(-2, 2)$. Escribe os cálculos.

11. (6 puntos)

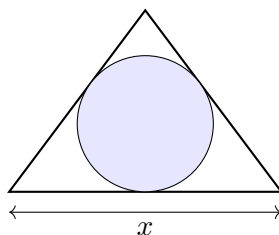
No cuadrilátero $ABCD$ cóñécense: $|AB| = 9$, $|AD| = 10$ e $|\angle BAD| = 60^\circ$. Neste cuadrilátero inscribiuse unha circunferencia e circunscribiuse outra circunferencia arredor del (ver a figura).



Calcula as lonxitudes dos lados BC e CD e a área do cuadrilátero $ABCD$. Escribe os cálculos.

12. [Nota: Texto común ás tarefas 12.1 e 12.2.]

No proxecto dun xardín planificouse un parterre con forma de triángulo isóscele de base de lonxitude x metros, que non supera os 10 metros. Neste parterre debe haber unha fonte con forma de círculo de diámetro 4 metros, que ten que ser tanxente a cada un dos lados do parterre triangular (ver a figura). Ao proxectista interésalle que, con este tamaño fixado da fonte, a área do parterre sexa a menor posíbel.

**12.1. (3 puntos)**

Demuestra que a área P (expresada en metros cadrados) do parterre triangular de base de lonxitude x metros vén dada pola fórmula

$$P(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 16}.$$

12.2. (4 puntos)

A área P do parterre triangular de base de lonxitude x metros vén dada pola fórmula

$$P(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 16}$$

para todo $x \in (4, 10]$. Determina a lonxitude x da base do parterre triangular para a que a área deste parterre é mínima. Calcula esa área mínima. Escribe os cálculos.

Solucións

Tarefa 1. $\binom{n+2}{n-1} = \binom{n+2}{3} = \frac{(n+2)(n+1)n}{6} = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$. Dividindo numerador e denominador entre n^3 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{6} \left(1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{\frac{1}{2} - \frac{4}{n^2} + \frac{7}{n^3}} = \frac{1/6}{1/2} = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

Tarefa 2. Ω son as permutacións de $\{1, \dots, 8\}$: $|\Omega| = 8!$. Entre os oito números só 3 e 6 son múltiplos de 3, e o produto de tres termos é divisíbel por 3 se e só se un deles é 3 ou 6. Sexan $p < q$ as posicións de 3 e 6. Cada un dos seis bloques de tres posicións consecutivas $\{i, i+1, i+2\}$ ($i = 1, \dots, 6$) debe conter p ou q : o bloque $\{1, 2, 3\}$ obriga a $p \leq 3$, o bloque $\{6, 7, 8\}$ a $q \geq 6$, e o bloque $\{p+1, p+2, p+3\}$ (que existe por ser $p \leq 3$) non contén p , logo $q \leq p+3$. Así $6 \leq q \leq p+3 \leq 6$: $p = 3$, $q = 6$, e esta disposición cumpre a condición. Os números 3 e 6 poden ocupar esas posicións de $2!$ maneiras e os outros seis números de $6!$:

$$P(A) = \frac{2! \cdot 6!}{8!} = \frac{2}{56} = \boxed{\frac{1}{28}}.$$

Tarefa 3. Para $x, y > 0$, multiplicando por $x^2 y^2 > 0$ a desigualdade é equivalente a

$$\begin{aligned} xy^2 + x^2 y &\leq x^3 + y^3 \iff x^3 + y^3 - x^2 y - xy^2 \geq 0 \\ &\iff x^2(x-y) - y^2(x-y) \geq 0 \iff (x+y)(x-y)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

que é certa porque $x+y > 0$ e $(x-y)^2 \geq 0$. Como todas as transformacións son equivalencias, queda demostrada (con igualdade só se $x = y$). $\square$

Tarefa 4. Coordenadas: $A = (0, 0)$, $B = (a, 0)$, $C = (a, a)$, $D = (0, a)$, $K = (\frac{a}{2}, 0)$, $L = (a, \frac{a}{2})$, $M = (a, m)$. Como $\vec{KD} = (-\frac{a}{2}, a)$ e $\vec{KM} = (\frac{a}{2}, m)$, a perpendicularidade dá $-\frac{a^2}{4} + am = 0$, $m = \frac{a}{4}$. Rectas: $AL : y = \frac{x}{2}$; $DK : y = a - 2x$; $DM : y = a - \frac{3}{4}x$.

$$P : \frac{x}{2} = a - 2x \Rightarrow P = \left(\frac{2a}{5}, \frac{a}{5}\right); \quad Q : \frac{x}{2} = a - \frac{3}{4}x \Rightarrow Q = \left(\frac{4a}{5}, \frac{2a}{5}\right).$$

$$|PQ| = \sqrt{\left(\frac{2a}{5}\right)^2 + \left(\frac{a}{5}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{5}. \quad \square$$

Tarefa 5. $|2x - 6| < |x^2 - 9| \iff 2|x - 3| < |x - 3||x + 3|$. Para $x = 3$ resulta $0 < 0$, falso. Para $x \neq 3$, dividindo por $|x - 3| > 0$: $|x + 3| > 2 \iff x > -1$ ou $x < -5$.

$$x \in (-\infty, -5) \cup (-1, 3) \cup (3, +\infty).$$

Tarefa 6. $a_n = 1 + (n - 1)r$. A condición xeométrica $a_3^2 = a_2a_6$:

$$(1 + 2r)^2 = (1 + r)(1 + 5r) \iff 1 + 4r + 4r^2 = 1 + 6r + 5r^2 \iff r^2 + 2r = 0 \iff r \in \{0, -2\}.$$

$r = 0$ non vale (o último termo sería 1). Con $r = -2$: $a_2 = -1$, $a_3 = -3$, $a_6 = -9$ (razón 3, correcta). Se a progresión ten k termos, $1 - 2(k - 1) = -2025 \Rightarrow k = 1014 > 6$. Suma:

$$S = \frac{1 + (-2025)}{2} \cdot 1014 = -1012 \cdot 1014 = \boxed{-1\,026\,168}.$$

Tarefa 7. Con $t = 2x$ e $\sin 3t = 3 \sin t - 4 \sin^3 t$:

$$\sin 3t - 2 \sin t = \sin t - 4 \sin^3 t = \sin t (1 - 4 \sin^2 t) = 0.$$

$\sin t = 0 \Rightarrow t = k\pi$; $\sin t = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow t = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$. Volvendo a $x = t/2$:

$$x = \frac{k\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Tarefa 8. $2\pi R = 6\sqrt{2}\pi \Rightarrow R = 3\sqrt{2}$, e o lado do triángulo equilátero é $|AB| = R\sqrt{3} = \boxed{3\sqrt{6}}$.

Sexa $l = |SB| = |SC|$. Teorema do coseno en SBC : $54 = 2l^2 \left(1 - \frac{5}{9}\right) = \frac{8}{9}l^2 \Rightarrow l^2 = \frac{243}{4}$, $l = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

O ángulo entre as caras SAC e SBC é o ángulo $\angle AEB$, onde E é o pé da perpendicular desde B a SC (por simetría, $AE \perp SC$ tamén e $|AE| = |BE|$; E está no segmento SC porque os ángulos de SBC en S e en C son agudos). Con $\sin \angle BSC = \sqrt{1 - \frac{25}{81}} = \frac{2\sqrt{14}}{9}$:

$$|BE|^2 = l^2 \sin^2 \angle BSC = \frac{243}{4} \cdot \frac{56}{81} = 42.$$

Teorema do coseno en AEB :

$$\cos \angle AEB = \frac{42 + 42 - 54}{2 \cdot 42} = \frac{30}{84} = \boxed{\frac{5}{14}}.$$

Tarefa 9. B verifica $4 + 0 - 4 = 0$ e A non ($1 - 2 - 4 \neq 0$), así que a recta $x + 2y - 4 = 0$ contén o lado BC . Como $|CA| = |CB|$, C está na mediatriz de AB : punto medio $(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$, vector $\vec{AB} = (3, 1)$, mediatriz $3x + y - 7 = 0$. Resolvendo $\{x + 2y = 4, 3x + y = 7\}$: $C = (2, 1)$.

$M = A + \frac{1}{5}\vec{AC} = (1, -1) + \frac{1}{5}(1, 2) = (\frac{6}{5}, -\frac{3}{5})$, e o raio é $|MC| = \frac{4}{5}|AC| = \frac{4}{5}\sqrt{5}$, $|MC|^2 = \frac{16}{5}$.

$$\left(x - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{5}.$$

Tarefa 10. f é quadrática com coeficiente principal $m^2 > 0$. Dous ceros distintos en $(-2, 2) \iff \Delta > 0$, vértice $x_w \in (-2, 2)$, $f(-2) > 0$ e $f(2) > 0$.

- $\Delta = 4m^2 - 4m^2(1 - m) = 4m^3 > 0 \iff m > 0$.
- $x_w = \frac{2m}{2m^2} = \frac{1}{m} \in (-2, 2)$; con $m > 0$: $m > \frac{1}{2}$.
- $f(-2) = 4m^2 + 3m + 1 > 0$ para $m > 0$ (todos os termos positivos).
- $f(2) = 4m^2 - 5m + 1 = (4m - 1)(m - 1) > 0 \iff m < \frac{1}{4}$ ou $m > 1$.

Intersección: $m \in (1, +\infty)$.

Tarefa 11. Por ser inscristíbel, $|\angle BCD| = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$; por ser circunscritíbel (ten circunferencia inscrita), $|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$, logo con $|BC| = x$: $|CD| = x + 1$. Teorema do coseno para BD nos triángulos ABD e CBD :

$$|BD|^2 = 81 + 100 - 2 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 91, \quad |BD|^2 = x^2 + (x + 1)^2 + x(x + 1) = 3x^2 + 3x + 1.$$

$$3x^2 + 3x + 1 = 91 \iff x^2 + x - 30 = 0 \iff x = 5 \text{ (} x = -6 \text{ descártase)}. \text{ Así } |BC| = 5, |CD| = 6.$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10 \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \sin 120^\circ = \frac{45\sqrt{3}}{2} + \frac{15\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3}.$$

Tarefa 12. 12.1. Sexa o triángulo ABC con base $AB = x$, D o punto medio de AB , $h = |CD|$ a altura, e O o centro da fonte (raio 2), que está en CD con $|OD| = 2$. Sexa T o punto de tanxencia co lado BC : $OT \perp BC$, $|OT| = 2$. Os triángulos rectángulos CTO e CDB son semellantes (ángulo común en C), logo

$$\frac{|OT|}{|DB|} = \frac{|CO|}{|CB|} \iff \frac{2}{x/2} = \frac{h-2}{\sqrt{h^2 + x^2/4}} \iff 16 \left(h^2 + \frac{x^2}{4} \right) = x^2(h-2)^2$$

(elevando ao cadrado, ambos os membros positivos, $h > 2$). Desenvolvendo: $16h^2 + 4x^2 = x^2h^2 - 4x^2h + 4x^2$, e dividindo por $h > 0$: $16h = x^2h - 4x^2$, isto é, $h(x^2 - 16) = 4x^2$. Como $h > 0$, debe ser $x > 4$ e $h = \frac{4x^2}{x^2 - 16}$. Polo tanto

$$P(x) = \frac{xh}{2} = \frac{2x^3}{x^2 - 16}. \quad \square$$

12.2. Para $x \in (4, 10]$:

$$P'(x) = 2 \cdot \frac{3x^2(x^2 - 16) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 16)^2} = \frac{2x^2(x^2 - 48)}{(x^2 - 16)^2}.$$

O signo é o de $x^2 - 48$: $P' < 0$ en $(4, 4\sqrt{3})$ e $P' > 0$ en $(4\sqrt{3}, 10]$ ($4\sqrt{3} \approx 6,93$). Logo P ten o mínimo (absoluto no intervalo) en $x = 4\sqrt{3}$:

$$P(4\sqrt{3}) = \frac{2 \cdot 192\sqrt{3}}{48 - 16} = 12\sqrt{3}.$$

Resposta: base $x = 4\sqrt{3} \text{ m}$, área mínima $12\sqrt{3} \text{ m}^2$ (o triángulo resulta equilátero: altura $6 = 3 \cdot 2$).

8 Países Baixos

PISA 2025, matemáticas: 483 puntos

Dificultade relativa estimada: 6/10 (posto 7 dos 25 exames analizados; PAU de Galiza = 5)

Exame: Exame central (*centraal examen*) de VWO, Matemáticas B, 1.º período (código VW-1025-a-26-1-o)

Nome orixinal: *Examen VWO 2026, wiskunde B, tijdvak 1*

Ano e convocatoria: 2026, *tijdvak 1* (convocatoria principal): mércores 13 de maio de 2026, 13.30–16.30

Duración: 3 horas **Calculadora:** calculadora gráfica (permitida no exame central de VWO)

Estrutura e cualificación: 17 preguntas abertas agrupadas en 7 problemas (*opgaven*); máximo 75 puntos. A puntuación de cada pregunta indícase á esquerda do seu número no orixinal (aquí, á dereita). O exame inclúe un breve formulario de trigonometría.

Contexto: O VWO (*voorbereidend wetenschappelijk onderwijs*) é o itinerario de secundaria de seis anos que dá acceso directo á universidade. A nota final de cada materia é a media da avaliación do centro (*schoolexamen*) e deste exame central nacional, elaborado polo Cito e o CvTE. *Wiskunde B* é a materia de matemáticas obrigatoria nos perfís científico-tecnolóxicos (*Natuur en Techniek*) e esixida para estudos de ciencias e enxeñaría.

Fonte: <https://www.examenblad.nl/2026/vwo/vakken/exacte-vakken/wiskunde-b-vwo>; https://static.allexamens.nl/VWO/Wiskunde%20B/2026/I/Wiskunde%20B/Wiskunde%20B%202026%20I_opgaven.pdf

Instrucións

Este exame consta de 17 preguntas. Neste exame pódense obter como máximo 75 puntos. Para cada número de pregunta indícase cantos puntos se poden obter cunha resposta correcta.

Se nunha pregunta se pide unha explicación, xustificación ou cálculo, normalmente non se concederán puntos á resposta se falta esa explicación, xustificación ou cálculo.

Non deas máis respostas (razóns, exemplos, etc.) das que se piden. Se, por exemplo, se piden dúas razóns e ti das máis de dúas, só se terán en conta na avaliación as dúas primeiras.

Fórmulas

Trigonometría

$$\begin{aligned}\sin(t+u) &= \sin(t)\cos(u) + \cos(t)\sin(u) & \sin(t-u) &= \sin(t)\cos(u) - \cos(t)\sin(u) \\ \cos(t+u) &= \cos(t)\cos(u) - \sin(t)\sin(u) & \cos(t-u) &= \cos(t)\cos(u) + \sin(t)\sin(u) \\ \sin(2t) &= 2\sin(t)\cos(t) & \cos(2t) &= \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1 = 1 - 2\sin^2(t)\end{aligned}$$

Un punto e unha recta

Dados o punto $P(7, 24)$ e a recta k de ecuación $3x - 4y = 0$. A circunferencia c ten centro O e pasa polo punto P . A circunferencia c corta a recta k á dereita do eixe y no punto S . Na figura 1 represéntase esta situación.

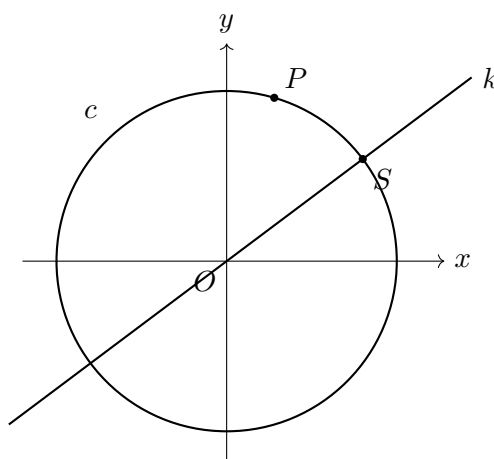


figura 1

1. Calcula de forma exacta as coordenadas de S . (4 puntos)

O punto A está na recta k de ecuación $3x - 4y = 0$. O punto B é a proxección ortogonal do punto A sobre o eixe y . O punto A pódese escoller de modo que a bisectriz do ángulo OAB pase polo punto $P(7, 24)$. Na figura 2 esta bisectriz represéntase con liña de puntos.

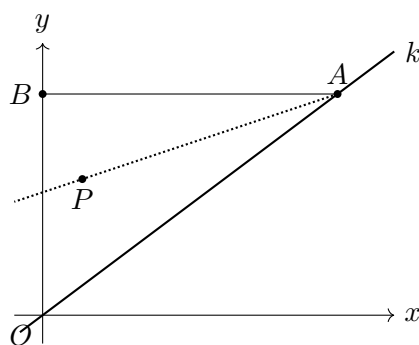


figura 2

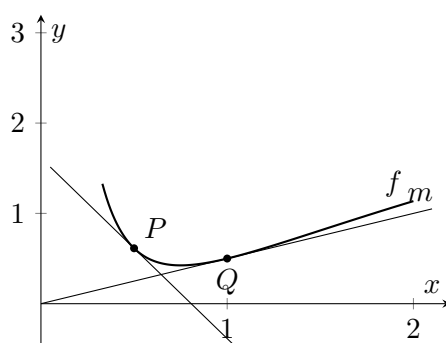
2. Calcula alxebricamente as coordenadas de A . (5 puntos)

Dous puntos de corte

A función f vén dada, para $0 < x < 2$, por:

$$f(x) = 2\ln(x) + \frac{3}{2x} - 1$$

Na gráfica de f está o punto P con $x_P = \frac{1}{2}$. A recta k é tanxente á gráfica de f en P . A recta m é perpendicular á recta k e é tanxente á gráfica de f no punto Q . Vexa a figura.



3. Calcula de forma exacta a coordenada x de Q . (6 puntos)

A función g vén dada por:

$$g(x) = 2 \ln(2x) + \frac{3}{4x} - 1$$

É posíbel obter a gráfica de g a partir da gráfica de f mediante unha única transformación.

4. Indica esta transformación. (2 puntos)

As gráficas de f e g córtanse no punto S .

5. Calcula de forma exacta a coordenada x de S . (4 puntos)

Descontinuidade evitábel e área

A función f_p vén dada por:

$$f_p(x) = \frac{|x - 2| + p}{x - 1}$$

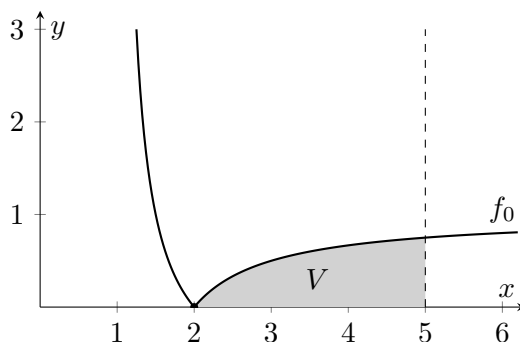
Para un único valor de p , a gráfica de f_p ten unha descontinuidade evitábel (un «buraco», en neerlandés *perforatie*).

6. Calcula de forma exacta as coordenadas desta descontinuidade evitábel. (5 puntos)

A expresión de f_0 pódese escribir, para $x > 1$, como:

$$f_0(x) = \left| 1 - \frac{1}{x-1} \right|$$

Na figura represéntase a súa gráfica.



O punto $(2,0)$ é o punto de corte da gráfica de f_0 co eixe x . V é a rexión limitada pola gráfica de f_0 , o eixe x e a recta de ecuación $x = 5$. Esta rexión aparece en gris na figura.

7. Calcula de forma exacta a área de V . (3 puntos)

Pelota saltarina

Neste problema consideramos un modelo simplificado da situación na que alguén deixa caer unha pelota saltarina en vertical cara abaixo. A pelota rebotará entón varias veces. Ao momento en que a pelota toca o chan chamámolo *rebote*. Despois de cada rebote, a pelota sobe menos ca despois do rebote anterior.

A altura da pelota entre dous rebotes consecutivos descríbese sempre mediante unha función cuadrática do tempo t . Desde que se solta ata o primeiro rebote a función chámase h_0 ; entre o primeiro e o segundo rebote, h_1 ; despois h_2 , e así sucesivamente. As gráficas destas funcións son anacos de parábolas.

Neste problema consideramos unha pelota saltarina que se solta desde unha altura de 1 metro no instante $t = 0$. O primeiro rebote prodúcese aos 0,45 segundos. Vexa a figura 1.

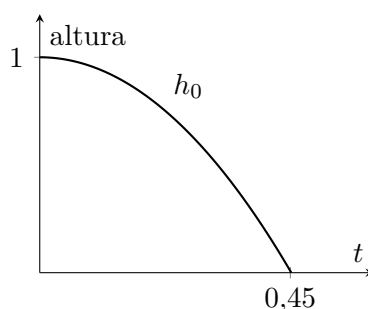


figura 1

Verifícase (aproximadamente) $h_0(t) = -4,9t^2 + 1$, con t en segundos e h_0 a altura en metros.

8. Calcula alxebricamente a velocidade, en m/s, coa que a pelota toca o chan por primeira vez. Dá o resultado final cun decimal. **(2 puntos)**

Entre dous rebotes consecutivos a pelota alcanza un punto máis alto. Cada vez, a altura dese punto máis alto é o 64 % da altura do punto máis alto anterior.

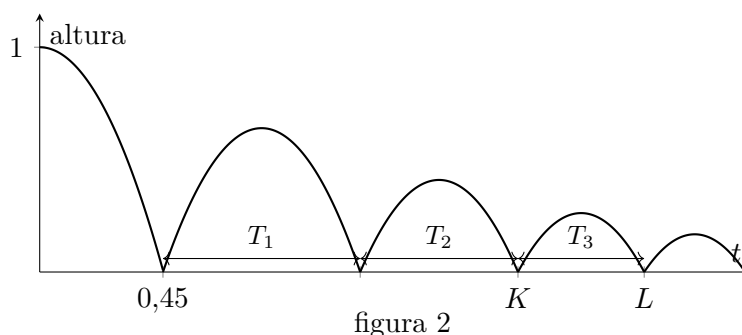


figura 2

Na figura de arriba vese que o tempo transcorrido entre dous rebotes consecutivos é cada vez menor. Indicamos esta duración, en segundos, con T_n . Así, $T_1 = 0,72$ é a duración entre o primeiro e o segundo rebote, T_2 a duración entre o segundo e o terceiro rebote, e así sucesivamente. T_3 vai desde o instante K ata o instante L .

Unha fórmula para T_n é:

$$T_n = 0,9 \cdot 0,8^n \quad \text{con } n \geq 1.$$

9. Cos datos anteriores, determina a expresión analítica de h_3 . Dá os números do resultado final con dous decimais. **(7 puntos)**

Lazo

O punto P móvese segundo as ecuacións de movemento

$$\begin{cases} x(t) = t^2(2-t) \\ y(t) = 2t(2-t) \end{cases} \quad \text{con } 0 \leq t \leq 2 \text{ e } t \text{ en segundos.}$$

O vector velocidade no instante t é $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4t - 3t^2 \\ 4 - 4t \end{pmatrix}$.

A rapidez (módulo da velocidade, en neerlandés *baansnelheid*) de P é mínima nun único instante t .

10. Calcula ese valor de t . Dá o resultado final con dous decimais. **(3 puntos)**

A traxectoria que percorre P represéntase na figura 1. A frecha indica o sentido no que o punto percorre a traxectoria.

O punto Q percorre a mesma traxectoria que o punto P . Q vai sempre 1 segundo por detrás do punto P e móvese no mesmo sentido que P .

Hai un único instante t no que os puntos P e Q están á mesma altura. Na figura 1 represéntase esta situación.

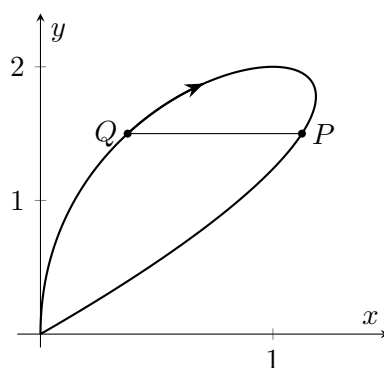


figura 1

11. Calcula de forma exacta a lonxitude do segmento PQ nesta situación. **(4 puntos)**

As ecuacións de movemento doutro punto veñen dadas por:

$$\begin{cases} x(t) = t^2(2-t) \\ y(t) = at(2-t) \end{cases}$$

Aquí a é unha constante, con $a > 0$.

O punto A é o punto da traxectoria no que a coordenada x é máxima; o punto B é o punto da traxectoria no que a coordenada y é máxima.

Hai un valor de a para o cal a pendente da recta que pasa por A e B é igual a -1 . Na figura 2 represéntase esta situación.

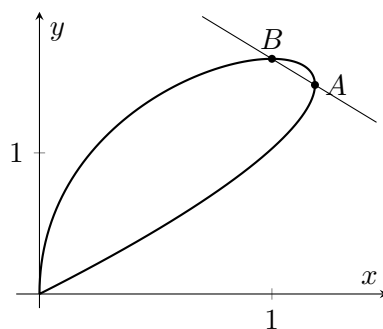


figura 2

12. Calcula de forma exacta ese valor de a .

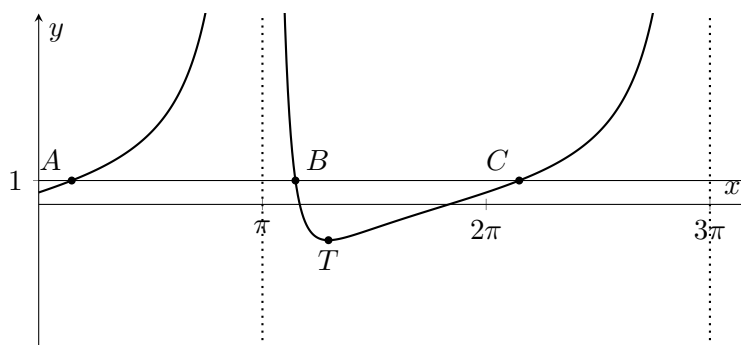
(6 puntos)

Trigonometría fraccionaria

A función f vén dada por:

$$f(x) = \frac{1 + 2 \sin(x)}{1 + \cos(x)} \quad \text{para } 0 \leq x < \pi \text{ e } \pi < x < 3\pi$$

A recta de ecuación $y = 1$ corta a gráfica de f nos puntos A , B e C , con $x_A < x_B < x_C$. Vexa a figura. Nela, as dúas asíntotas verticais represéntanse con liña de puntos.



13. Demostra alxebricamente que $AB = BC$.

(3 puntos)

A gráfica de f ten un extremo (vértice) T , que está por debaixo do eixe x . Vexa a figura.

Para a coordenada x de T verifícase: $5 \cos^2(x) + 8 \cos(x) + 3 = 0$

14. Demostra que isto é certo.

(6 puntos)

15. Calcula alxebricamente a coordenada y de T .

(5 puntos)

Atención: as últimas preguntas deste exame están na páxina seguinte.

Volume acoutado

A función f vén dada por

$$f(x) = e^{-x} - e^{-2x}.$$

Na figura 1 represéntase a gráfica de f . A gráfica corta o eixe x na orixe. Tamén se representa, para un valor de $p > 0$, a recta de ecuación $x = p$.

Consideramos a rexión limitada pola recta de ecuación $x = p$, o eixe x e a gráfica de f . Esta rexión aparece en gris na figura 1.

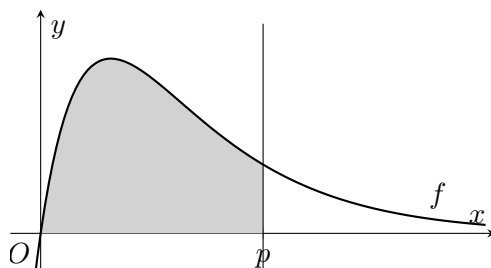


figura 1

A rexión gris xira arredor do eixe x . Así se obtén un sólido de revolución. Vexa a figura 2.

[Nota: Figura 2: debuxo en perspectiva do sólido de revolución obtido ao xirar a rexión gris arredor do eixe x , entre $x = 0$ e $x = p$.]

O volume do sólido de revolución é L_p . Para el verifícase:

$$L_p = \frac{1}{12}\pi (1 - 6e^{-2p} + 8e^{-3p} - 3e^{-4p})$$

16. Demostra que a fórmula anterior para L_p é correcta. (6 puntos)

Cando p crece indefinidamente, L_p tende a un valor límite L . Hai un valor de p para o cal L_p é igual á metade do valor límite L .

17. Calcula ese valor de p . Redondea o resultado final a dous decimais. (4 puntos)

fin

Solucións

Pregunta 1. A circunferencia c ten centro O e raio $OP = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$, logo $c: x^2 + y^2 = 625$. Da recta k , $y = \frac{3}{4}x$. Substituíndo: $x^2 + \frac{9}{16}x^2 = 625 \Rightarrow \frac{25}{16}x^2 = 625 \Rightarrow x^2 = 400$. Como S está á dereita do eixe y , $x = 20$ e $y = 15$:

$$\boxed{S(20, 15)}$$

Pregunta 2. Sexa $A(4a, 3a)$ con $a > 0$ (está en k); entón $B(0, 3a)$. Todo punto da bisectriz do ángulo OAB equidista dos lados AO (recta k) e AB (recta $y = 3a$).

$$d(P, k) = \frac{|3 \cdot 7 - 4 \cdot 24|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{75}{5} = 15, \quad d(P, AB) = |24 - 3a|.$$

De $|24 - 3a| = 15$ obtense $a = 13$ ou $a = 3$. Para $a = 3$ ($A(12, 9)$, $B(0, 9)$) o punto P está por riba da recta AB , fóra do ángulo OAB (estaría na bisectriz exterior); polo tanto $a = 13$.

Comprobación: con $A(52, 39)$, os vectores unitarios de A cara a O e cara a B son $(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$ e $(-1, 0)$; a súa suma $(-\frac{9}{5}, -\frac{3}{5})$ é paralela a $(3, 1)$, e $\overrightarrow{AP} = (-45, -15) = -15(3, 1)$. Logo a bisectriz pasa por P .

$$\boxed{A(52, 39)}$$

Pregunta 3. $f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{3}{2x^2}$, polo que $f'(\frac{1}{2}) = 4 - 6 = -2$: a pendente de k é -2 e a de m (perpendicular) é $\frac{1}{2}$. Buscamos x con $f'(x) = \frac{1}{2}$:

$$\frac{2}{x} - \frac{3}{2x^2} = \frac{1}{2} \iff 4x - 3 = x^2 \iff x^2 - 4x + 3 = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x = 3.$$

Como $0 < x < 2$, $\boxed{x_Q = 1}$.

Pregunta 4. $f(2x) = 2\ln(2x) + \frac{3}{2 \cdot 2x} - 1 = 2\ln(2x) + \frac{3}{4x} - 1 = g(x)$. Polo tanto, a gráfica de g obtense da de f mediante unha **contracción horizontal respecto do eixe y de factor $\frac{1}{2}$** (as coordenadas x multiplícanse por $\frac{1}{2}$).

Pregunta 5. $f(x) = g(x) \iff 2\ln x + \frac{3}{2x} = 2\ln 2 + 2\ln x + \frac{3}{4x} \iff \frac{3}{4x} = 2\ln 2 \iff$

$$\boxed{x_S = \frac{3}{8\ln 2}} (\approx 0,541).$$

Pregunta 6. O denominador anúlase en $x = 1$; para que haxa un buraco o numerador debe anularse tamén alí: $|1 - 2| + p = 0 \Rightarrow p = -1$. Para x próximo a 1 ($x < 2$) é $|x - 2| = 2 - x$, logo

$$f_{-1}(x) = \frac{2 - x - 1}{x - 1} = \frac{1 - x}{x - 1} = -1 \quad (x \neq 1),$$

e o límite en $x = 1$ é -1 . A descontinuidade evitábel é $\boxed{(1, -1)}$.

Pregunta 7. En $[2, 5]$ é $1 - \frac{1}{x-1} \geq 0$, así que

$$\text{área}(V) = \int_2^5 \left(1 - \frac{1}{x-1}\right) dx = \left[x - \ln(x-1)\right]_2^5 = 3 - \ln 4 = \boxed{3 - 2\ln 2}.$$

Pregunta 8. $h_0(t) = 0 \iff t^2 = \frac{1}{4,9} \iff t = \frac{1}{\sqrt{4,9}} \approx 0,452$ s. A velocidade é $h'_0(t) = -9,8t$, logo no primeiro rebote $|h'_0(t)| = 9,8 \cdot \frac{1}{\sqrt{4,9}} = \sqrt{19,6} \approx 4,427$. $\boxed{\approx 4,4 \text{ m/s}}$

Pregunta 9. h_3 describe o voo entre o 3.º e o 4.º rebote, de duración $T_3 = 0,9 \cdot 0,8^3 = 0,4608$.

- Instante do 3.º rebote: $K = 0,45 + T_1 + T_2 = 0,45 + 0,72 + 0,576 = 1,746$; $L = K + T_3 = 2,2068$.
- O vértice está no punto medio: $t_v = K + \frac{1}{2}T_3 = 1,9764$.
- Altura máxima: tras cada rebote o 64 % da anterior, partindo de 1 m: $0,64^3 = 0,262144$.

Así $h_3(t) = -c(t - 1,9764)^2 + 0,262144$ con $h_3(K) = 0$: $c = \frac{0,262144}{0,2304^2} = \frac{4}{0,81} \approx 4,938$. Resulta

$$\boxed{h_3(t) \approx -4,94(t - 1,98)^2 + 0,26} \quad (\text{desenvolvendo: } h_3(t) \approx -4,94t^2 + 19,52t - 19,03),$$

válida para $1,75 \leq t \leq 2,21$ aproximadamente.

Pregunta 10. A rapidez é $v(t) = \sqrt{(4t - 3t^2)^2 + (4 - 4t)^2}$; é mínima onde o é $w(t) = v(t)^2$. $w'(t) = 2(4t - 3t^2)(4 - 6t) - 8(4 - 4t) = 4(9t^3 - 18t^2 + 16t - 8)$. A ecuación $9t^3 - 18t^2 + 16t - 8 = 0$ ten unha única raíz real (coa calculadora gráfica), $t \approx 1,1216$, onde w' pasa de negativa a positiva. $t \approx 1,12 \text{ s}$

Pregunta 11. Q está no instante t onde estaba P no instante $t-1$. Mesma altura: $y(t) = y(t-1)$:

$$2t(2-t) = 2(t-1)(3-t) \iff 4t - 2t^2 = -2t^2 + 8t - 6 \iff t = \frac{3}{2}.$$

Entón $P = (x(\frac{3}{2}), y(\frac{3}{2})) = (\frac{9}{8}, \frac{3}{2})$ e $Q = (x(\frac{1}{2}), y(\frac{1}{2})) = (\frac{3}{8}, \frac{3}{2})$, logo $PQ = \frac{9}{8} - \frac{3}{8} = \frac{3}{4}$.

Pregunta 12. $x'(t) = 4t - 3t^2 = 0 \Rightarrow t = \frac{4}{3}$ (en $t = 0$ é mínimo): $A = (\frac{32}{27}, \frac{8a}{9})$. $y'(t) = a(2 - 2t) = 0 \Rightarrow t = 1$ (máximo porque $a > 0$): $B = (1, a)$.

$$\text{pendente}(AB) = \frac{\frac{8a}{9} - a}{\frac{32}{27} - 1} = \frac{-a/9}{5/27} = -\frac{3a}{5} = -1 \iff \boxed{a = \frac{5}{3}}.$$

Pregunta 13. $f(x) = 1 \iff 1 + 2\sin x = 1 + \cos x \iff \cos x = 2\sin x$. Se fose $\cos x = 0$ tamén sería $\sin x = 0$, imposíbel; logo $\tan x = \frac{1}{2}$, é dicir, $x = \alpha + k\pi$ con $\alpha = \arctan \frac{1}{2} \in (0, \frac{\pi}{2})$. No dominio ($0 \leq x < 3\pi$, $x \neq \pi$) as solucións son $x_A = \alpha$, $x_B = \alpha + \pi$, $x_C = \alpha + 2\pi$ (ningunha cumpre $\cos x = -1$). Os tres puntos teñen $y = 1$, polo que

$$AB = x_B - x_A = \pi = x_C - x_B = BC. \quad \blacksquare$$

Pregunta 14. Pola regra do cociente:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2\cos x(1 + \cos x) + \sin x(1 + 2\sin x)}{(1 + \cos x)^2} = \frac{2\cos x + 2\cos^2 x + 2\sin^2 x + \sin x}{(1 + \cos x)^2} \\ &= \frac{\sin x + 2\cos x + 2}{(1 + \cos x)^2}. \end{aligned}$$

En T é $f'(x) = 0$, logo $\sin x = -2 - 2\cos x$. Elevando ao cadrado e usando $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$:

$$1 - \cos^2 x = 4 + 8\cos x + 4\cos^2 x \iff 5\cos^2 x + 8\cos x + 3 = 0. \quad \blacksquare$$

Pregunta 15. $5\cos^2 x + 8\cos x + 3 = 0 \iff (5\cos x + 3)(\cos x + 1) = 0$. Como $\cos x = -1$ non está no dominio, $\cos x_T = -\frac{3}{5}$, e de $\sin x = -2 - 2\cos x$ sae $\sin x_T = -2 + \frac{6}{5} = -\frac{4}{5}$ (coherente: $\sin^2 + \cos^2 = 1$). Entón

$$y_T = \frac{1 + 2 \cdot (-\frac{4}{5})}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{2}{5}} = \boxed{-\frac{3}{2}}.$$

Pregunta 16.

$$\begin{aligned} L_p &= \pi \int_0^p (e^{-x} - e^{-2x})^2 dx = \pi \int_0^p (e^{-2x} - 2e^{-3x} + e^{-4x}) dx \\ &= \pi \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{2}{3}e^{-3x} - \frac{1}{4}e^{-4x} \right]_0^p \\ &= \pi \left(-\frac{1}{2}e^{-2p} + \frac{2}{3}e^{-3p} - \frac{1}{4}e^{-4p} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{12}\pi(1 - 6e^{-2p} + 8e^{-3p} - 3e^{-4p}), \end{aligned}$$

xa que $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. $\blacksquare$

Pregunta 17. Cando $p \rightarrow \infty$, as exponenciais tenden a 0, logo $L = \frac{\pi}{12}$. A condición $L_p = \frac{1}{2}L$ é

$$1 - 6e^{-2p} + 8e^{-3p} - 3e^{-4p} = \frac{1}{2}.$$

Coa calculadora gráfica (intersección), ou con $u = e^{-p} \in (0, 1)$: $3u^4 - 8u^3 + 6u^2 - \frac{1}{2} = 0$ ten a única raíz $u \approx 0,38573$ en $(0, 1)$, logo $p = -\ln u \approx 0,9526$. $p \approx 0,95$

9 Irlanda

PISA 2025, matemáticas: 480 puntos

Dificultade relativa estimada: 5/10 (posto 12 dos 25 exames analizados; PAU de Galiza = 5)

Exame: Leaving Certificate Examination — Mathematics, Higher Level (nivel superior), Paper 1 e Paper 2

Nome orixinal: *Leaving Certificate Examination 2026. Mathematics. Paper 1 / Paper 2. Higher Level* (State Examinations Commission, SEC; en irlandés *Ardteistiméireacht*)

Ano e convocatoria: 2026, convocatoria de xuño (Paper 1: venres 5 de xuño de 2026, 14:00–16:30; Paper 2: luns 8 de xuño de 2026, 9:30–12:00)

Duración: 2 h 30 min cada proba **Calculadora:** si (hai que anotar marca e modelo na portada); entrégase o folleto oficial *Formulae and Tables*

Estrutura e cualificación: cada proba vale 300 puntos (*marks*). Sección A (*Concepts and Skills*): 6 preguntas de 30 puntos, das que se responden 5. Sección B (*Contexts and Applications*): 4 preguntas de 50 puntos, das que se responden 3. O Paper 1 trata de álgebra, números complexos, sucesións e series, funcións e cálculo; o Paper 2, de estatística, probabilidade, xeometría, xeometría analítica e trigonometría.

Contexto: O Leaving Certificate é o exame estatal ao final da secundaria (6.º curso, 17–18 anos). As cualificacións das seis mellores materias convértense en puntos CAO (Central Applications Office), que determinan a admisión na universidade; Matemáticas é obrigatoria na práctica e o nivel superior dá 25 puntos de bonificación. O exame redáctase en inglés e irlandés; aquí tradúcese a versión inglesa.

Fonte: Paper 1: <https://telescoper.blog/wp-content/uploads/2026/06/lc003alp100ev.pdf>; Paper 2: <https://telescoper.blog/wp-content/uploads/2026/06/lc003alp200ev-2.pdf>; <https://telescoper.blog/2026/06/08/the-2026-leaving-certificate-mathematics-papers/>; <https://www.examinations.ie>

[Nota: O exame indica só a puntuación de cada pregunta, non a de cada apartado.]

Paper 1 — Instrucións

Hai dúas seccións nesta proba:

Sección A	Conceptos e destrezas (<i>Concepts and Skills</i>)	150 puntos	6 preguntas
Sección B	Contextos e aplicacións (<i>Contexts and Applications</i>)	150 puntos	4 preguntas

Responde as preguntas do seguinte xeito:

- calquera **cinco** preguntas da Sección A — Conceptos e destrezas;
- calquera **tres** preguntas da Sección B — Contextos e aplicacións.

Escribe o teu número de exame no recadro da portada. Escribe as respostas con bolígrafo azul ou negro. Podes usar lapis só en gráficas e diagramas.

Este caderno de exame será dixitalizado e o teu traballo presentaráselle a un corrector na pantalla. É posíbel que o corrector non vexa nada do que escribas fóra das áreas de resposta. Escribe todas as respostas neste caderno.

O vixilante darache unha copia do folleto *Formulae and Tables* (fórmulas e táboas). Debes devolvelo ao final do exame.

Os diagramas, en xeral, non están debuxados a escala. Perderás puntos se as túas solucións non inclúen o traballo de apoio pertinente. Podes perder puntos se non se inclúen as unidades de medida

apropiadas, cando proceda. Podes perder puntos se as respostas non se dan na forma máis simple, cando proceda.

Escribe aquí a marca e o modelo da túa calculadora ou calculadoras: _____

Paper 1 — Sección A: Conceptos e destrezas (150 puntos)

Responde calquera **cinco** preguntas desta sección.

1. (30 puntos)

- (a) Resolve a seguinte ecuación en $a \in \mathbb{R}$, $a \geq -7$:

$$5 = 1 + \sqrt{a + 7}$$

- (b) Reordena a seguinte expresión para escribir p en función de n e s , onde n , p e s son números reais positivos:

$$\frac{1}{n} + \frac{2}{p} = 3s$$

$$p = \underline{\hspace{2cm}}$$

- (c) $2x^2 + 4x - 6$ é un factor de $8x^3 + 6x^2 - 44x + 30$. Usando este feito, ou doutro xeito, resolve a ecuación:

$$8x^3 + 6x^2 - 44x + 30 = 0$$

$$x = \underline{\hspace{1cm}}, \quad x = \underline{\hspace{1cm}} \quad \text{e} \quad x = \underline{\hspace{1cm}}$$

2. (30 puntos)

- (a) Escribindo a parte periódica como unha serie xeométrica infinita, expresa o seguinte número na forma $\frac{a}{b}$, onde $a, b \in \mathbb{N}$:

$$4,3\dot{6} = 4,36363636 \dots$$

- (b) Rya vai pedir un préstamo para comprar un coche. A taxa de xuro anual (TAE, *APR*) do seu préstamo é do 8,4 %.

- (i) Demostra que esta TAE equivale a unha taxa de xuro mensual do 0,67 %, con 2 cifras decimais.

- (ii) O préstamo de Rya é de 14 000 €. Para devolvelo, fai pagamentos mensuais iguais durante 5 anos. Fai o primeiro pagamento un mes despois de recibir o préstamo. Acha o importe de cada pagamento que fai Rya, arredondado ao céntimo, e a partir del acha o total de xuros que paga Rya ao longo dos 5 anos. Supón que a taxa de xuro mensual do préstamo é do 0,67 %.

$$\text{Pagamento mensual} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ €} \quad \text{Xuros totais} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ €}$$

3. (30 puntos)

- (a) A función $f(x) = (7x^2)(\cos(3x))$. Usa a regra do produto para achar $f'(x)$ e, a partir dela, acha o valor de $f'(\pi)$ en función de π .

- (b) A función $g(x)$ ten a seguinte derivada segunda:

$$g''(x) = 30x - 18$$

A pendente da recta tanxente á curva $y = g(x)$ no punto $(-1, 8)$ é -2 .

- (i) Integrando $g''(x)$, usa esta información para achar unha expresión en x para $g'(x)$, a derivada primeira de $g(x)$.

(ii) A partir do anterior, acha unha expresión en x para $g(x)$.

4. (30 puntos)

- (a) $u = 3 - 7i$, e $\bar{u}$ é o seu conxugado complexo. Expresa $2\bar{u} + 5i$ na forma $a + bi$, onde $a, b \in \mathbb{R}$.
- (b) Usa o teorema de De Moivre para achar $(3 - \sqrt{3}i)^8$. Dá a resposta na forma $a + bi$, onde $a, b \in \mathbb{R}$.
- (c) w e v son os dous números complexos seguintes, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e θ é un ángulo en graos:

$$w = a(\cos 160^\circ + i \sin 160^\circ) \quad v = b(\cos \theta + i \sin \theta)$$

Para estes dous números, $|w| = 5$ e $v = -15$. Usa esta información para achar un conxunto posíbel de valores de a , de b e de θ .

5. (30 puntos)

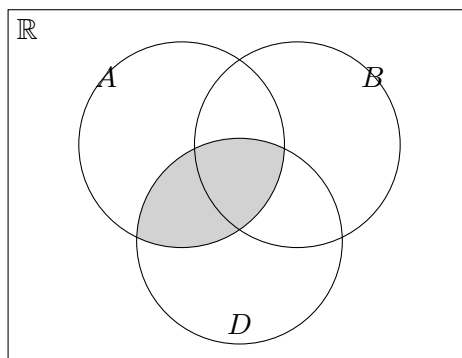
- (a) Escribe cada un dos seguintes números na forma 4^r , onde $r \in \mathbb{Q}$.

Número	64	1	16	2
Número na forma 4^r				

- (b) O diagrama de Venn seguinte mostra os tres conxuntos seguintes en $\mathbb{R}$:

- A : todos os múltiplos enteiros de 4 (todos os números que se poden escribir como $4m$, onde $m \in \mathbb{Z}$);
- B : todos os números que se poden escribir como 4^r , onde $r \in \mathbb{Q}$;
- D : $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, o conxunto dos números irracionais.

O conxunto $A \cap D$ está sombreado: non hai elementos nesta parte do diagrama de Venn.



- (i) Escribe cada un dos seguintes números na rexión correcta do diagrama de Venn da páxina anterior:

$$64, \quad \frac{1}{16}, \quad \sqrt{3}, \quad \sqrt{2}, \quad 12, \quad 1$$

- (ii) Escribe un elemento de $\mathbb{R}$ que non estea en ningún dos conxuntos A , B ou D . Non uses ningún dos números do apartado (b)(i).

- (c) Para certo número real k :

$$4^k = 9$$

Acha o valor de k . Dá a resposta na forma $\frac{a}{\log_3 b}$, onde $a, b \in \mathbb{N}$ son constantes.

6. (30 puntos)

- (a) Demostra por indución que o seguinte é certo para todo $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 7$:

$$n! > 3^n$$

(b) Resolve esta ecuación en $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 156$$

(c) $T_1, T_2, T_3, \dots$ é unha sucesión xeométrica na que:

- o primeiro termo, $T_1 < 2$;
- a suma dos dous primeiros termos, $T_1 + T_2 = 2$;
- a suma dos tres primeiros termos, $T_1 + T_2 + T_3 < 2$.

Acha unha sucesión xeométrica posíbel para a que isto se cumpra. Indica os tres primeiros termos da túa sucesión e acha o valor de $S_3 = T_1 + T_2 + T_3$.

$T_1 = \underline{\hspace{2cm}}$ $T_2 = \underline{\hspace{2cm}}$ $T_3 = \underline{\hspace{2cm}}$ $S_3 = \underline{\hspace{2cm}}$

Paper 1 — Sección B: Contextos e aplicacións (150 puntos)

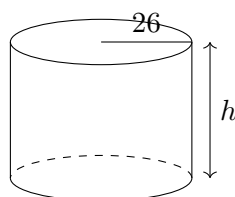
Responde calquera **tres** preguntas desta sección.

7. (50 puntos) Un depósito de auga ten forma de cilindro. Durante un período de 4 minutos, o volume de auga do depósito pódese modelizar mediante:

$$V(t) = 0,025t^3 - 9t^2 + 550,8t + 68\,900$$

onde V está en cm^3 e t é o tempo, en segundos, para $0 \leq t \leq 240$, $t \in \mathbb{R}$.

- Acha o volume de auga do depósito despois de 1 minuto.
- Usa a derivación para achar a velocidade á que está a cambiar o volume de auga do depósito despois de exactamente 150 segundos (é dicir, acha $\frac{dV}{dt}$ nese instante). Dá a resposta en cm^3 por segundo.
- Acha o conxunto de valores de t para os que o volume de auga do depósito está a diminuír.
- A auga do depósito ten forma de cilindro cun raio constante de 26 cm e unha altura de h cm, onde $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$.



Acha $\frac{dV}{dh}$ e, a partir de aí ou doutro xeito, acha a velocidade de cambio da altura da auga do depósito con respecto ao tempo despois de 150 segundos. Dá a resposta en cm por segundo, con 2 cifras decimais.

- Vértese auga noutro recipiente. A función $C(h)$ pódese usar para modelizar a velocidade á que está a cambiar a altura desta auga, en centímetros por segundo, cando a súa altura é h cm. $C(h)$ vén dada por:

$$C(h) = \frac{20}{16\pi h - \pi h^2}$$

Acha o valor mínimo local de $C(h)$. Dá a resposta en cm/segundo, cun decimal. Usa a derivación na túa solución.

- $C(h)$ está definida para todos os valores de $h \in \mathbb{R}$ tales que $0 < h < M$, para unha constante $M \in \mathbb{R}$. Acha o maior valor que pode ter M .

8. **(50 puntos)** Rían está afinando un piano. Ten unha aplicación no teléfono que pode medir a frecuencia, en hertz (Hz), de calquera nota do piano. Rían chama a unha das notas *La de concerto* (*Concert A*) e afínala para que teña unha frecuencia de 440 Hz. Despois usa a seguinte función $F(x)$, para $x \in \mathbb{R}$, para axudarse a afinar as outras notas do piano:

$$F(x) = 440 \times 2^{\frac{x}{12}}$$

Para cada nota do piano, Rían conta cantas notas está por riba (ou por debaixo) do La de concerto. Rían afina a nota que está x notas por riba do La de concerto á frecuencia $F(x)$, para $x \in \mathbb{N}$. Afina a nota que está x notas por debaixo do La de concerto á frecuencia $F(-x)$, para $x \in \mathbb{N}$.

- Rían afina a nota que está 11 notas por riba do La de concerto. Tomando $x = 11$, usa $F(x)$ para achar a frecuencia desta nota, arredondada ao número enteiro máis próximo.
- Rían afina a nota que está 6 notas por debaixo do La de concerto. Acha a frecuencia desta nota. Dá a resposta en Hz, con 4 cifras significativas.
- Rían sabe que a nota que está sete notas por riba do La de concerto ten unha frecuencia de aproximadamente 660 Hz. Acha o valor real de $x \in \mathbb{R}$ para o que $F(x) = 660$. Dá a resposta con 2 cifras decimais.
- Acha unha expresión para $F'(x)$, a derivada de F con respecto a x . Non é necesario que simplifiques a resposta.
- $G(x)$ é outra función que se pode usar para definir a frecuencia das notas, para $x \in \mathbb{R}$. Para certo número $k \in \mathbb{R}$:

$$G(k) = 197 \quad \text{e} \quad G'(k) = 5,8$$

- Usando só esta información, estima o valor de $G(k+2)$. Amosa o teu traballo.
 - A función $G(x)$ é da forma $G(x) = Ae^{bx}$, onde A e b son constantes positivas. Baseándote nisto, indica se a estimación de $G(k+2)$ do apartado (e)(i) é demasiado grande ou demasiado pequena comparada co valor real de $G(k+2)$, ou se non temos información suficiente para estar seguros.
- (f) Cada persoa dun coro é soprano (S), contralto (A), tenor (T) ou baixo (B). Neste coro:
- hai 384 persoas en total;
 - hai o dobre de contraltos que de sopranos;
 - hai 12 tenores máis que baixos;
 - o número de (sopranos máis contraltos) é o triplo do número de (tenores máis baixos).

Calcula o número de sopranos, de contraltos, de tenores e de baixos do coro.

9. **(50 puntos)** Ella vai nadar. Nunha sesión, nada por series. As tres primeiras series móstranse na táboa seguinte. O primeiro largo (*shuttle*) de cada serie é de 20 m. Os largos aumentan de lonxitude de 20 en 20 m ata chegar ao máximo desa serie, e despois diminúen de 20 en 20 m ata que a lonxitude do largo volve ser 20 m. O largo máis longo de cada serie é 20 m máis longo que o largo máis longo da serie anterior.

Serie	Largos (m)	Número de largos	Distancia total (m)
Serie 1	20 40 20	3	80
Serie 2	20 40 60 40 20	5	
Serie 3	20 40 60 80 60 40 20		320
Serie 4			

- Completa os valores que faltan na táboa anterior: todos os largos da Serie 4 e os outros 4 valores que faltan.

- (b) Acha a lonxitude do 12.^o largo da Serie 14.
- (c) Acha unha fórmula, en función de $n \in \mathbb{N}$, para a distancia total (en metros) da Serie n . Dá a resposta na forma $an^2 + bn + c$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ son constantes.
- (d) Na Serie h , o largo 21 e o largo 43 teñen a mesma lonxitude. Acha o valor de h .
- (e) Acha unha expresión en $k \in \mathbb{N}$ para a lonxitude do k -ésimo largo da Serie 18, onde $19 \leq k \leq 37$.

Como parte do seu adestramento, Ella tamén levanta pesas. O número de veces seguidas que pode levantar un peso dado chámase o número de *repeticións* que pode facer con ese peso. Hai diferentes fórmulas que Ella pode usar para estimar o peso máis grande que podería levantar unha soa vez, chamado o seu *máximo dunha repetición* (M). Dúas destas fórmulas móstranse a continuación. Cada fórmula dá un valor de M en kg, usando o feito de que Ella pode facer r repeticións cun peso de w kg.

$$\text{Fórmula de Epley: } M = w \times \left(1 + \frac{r}{30}\right) \qquad \text{Fórmula de Brzycki: } M = w \times \left(\frac{36}{37 - r}\right)$$

- (f) Acha a diferenza entre os valores de M que dá cada fórmula para 5 repeticións ($r = 5$). Dá a resposta como unha fracción en función de w .
- (g) Resolve unha ecuación para achar o número de repeticións (r) para o que as dúas fórmulas dan o mesmo valor de M , para calquera peso dado w .

10. (50 puntos) Darek está estudando padróns no plano cartesiano.

- (a) (i) O diagrama seguinte mostra as gráficas das funcións $g(x)$ e $g(x) + 1$. Debuxa e rotula a gráfica de $y = g(x) + 3$ no diagrama, usando os mesmos eixes e escalas.

[Nota: Figura: eixes con marcas de -4 a 3 en x e de -4 a 4 en y ; dúas curvas rotuladas $y = g(x)$ e $y = g(x) + 1$ (a segunda é a primeira trasladada unha unidade cara arriba).]

- (ii) O diagrama seguinte mostra as gráficas das funcións $h(x)$ e $h(x - 1)$. Debuxa e rotula a gráfica de $y = h(x + 2)$ no diagrama, usando os mesmos eixes e escalas.

[Nota: Figura: eixes con marcas de -4 a 4 en x e de -1 a 2 en y ; dúas curvas, $y = h(x)$ e $y = h(x - 1)$ (traslación horizontal dunha unidade cara á dereita).]

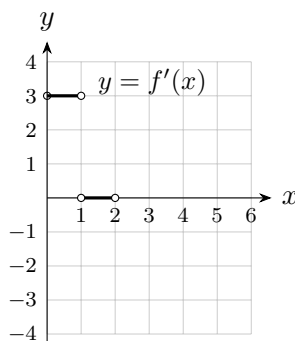
- (b) O diagrama seguinte mostra parte da gráfica da función periódica $f(x)$. O diagrama mostra máis dun período completo. A gráfica da función repítese deste xeito para todo $x \in \mathbb{R}$.

[Nota: Figura: gráfica rotulada $y = f(x)$, formada por segmentos, en eixes con marcas de -6 a 6 en x e de -2 a 2 en y . Do apartado (d) dedúcese que f ten pendente 3 en $0 < x < 1$, pendente 0 en $1 < x < 2$ e que non é derivábel en $x = 1$, $x = 2$ e $x = 5$.]

- (i) Indica o período da función $f(x)$.
- (ii) Hai infinitos números enteiros $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, para os que a gráfica de $y = f(x)$ e a gráfica de $y = f(x + n)$ son a mesma. Indica tres valores posíbeis de n .

- (c) Acha o valor de $\int_0^3 f(x) dx$. Amosa todo o teu traballo.

- (d) Baseándose na gráfica de $f(x)$ da páxina anterior, $f'(x)$, a derivada de $f(x)$, está definida para $x \in \mathbb{R}$ con $0 < x < 6$ e $x \neq 1, 2, 5$. O diagrama da dereita mostra parte da gráfica de $y = f'(x)$. É igual a 3 para $0 < x < 1$ e é igual a 0 para $1 < x < 2$. Debuxa a gráfica de $y = f'(x)$ no diagrama da dereita, para $2 < x < 6$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 5$.



- (e) $j(x)$ é outra función de x , con $j(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Para unha constante $a > 1$:

$$\int_1^a j(x) dx = 200$$

Usa isto para achar o valor da seguinte expresión en función de a e b , onde $b > 0$ é unha constante:

$$\int_1^a [j(x) + b] dx$$

- (f) Darek está investigando se hai funcións h para as que

$$h(x+1) = h(x) + 2$$

Comeza estudando funcións da forma $h(x) = ax^2 + bx + c$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ son constantes.

- (i) Darek sabe que $h(x+1) = ax^2 + 2ax + a + bx + b + c$. Usa isto para achar os valores de a e b que fan que se cumpra o seguinte para todos os valores de x :

$$h(x+1) = h(x) + 2$$

- (ii) Indica que información dan sobre a gráfica de $y = h(x)$ os teus valores de a e b do apartado (f)(i).

Paper 2 — Instrucións

Mesma estrutura e instrucións que o Paper 1: Sección A (Conceptos e destrezas, 150 puntos, 6 preguntas; responde calquera **cinco**) e Sección B (Contextos e aplicacións, 150 puntos, 4 preguntas; responde calquera **tres**). Escribe as respostas con bolígrafo azul ou negro; podes usar lapis só en gráficas e diagramas. Entrégase o folleto *Formulae and Tables*.

[Nota: as instrucións da portada do Paper 2 son idénticas ás do Paper 1 e non se repiten.]

Paper 2 — Sección A: Conceptos e destrezas (150 puntos)

Responde calquera **cinco** preguntas desta sección.

1. (30 puntos) Unha tenda rexistra o número de vendas que fai cada hora durante un período de tempo.

5	4 4 5 5 7 7 8	Clave: $5 \mid 7 = 57$ vendas
6	2 3 3 4 5 7 9 9	
7	0 3 7	
8	0 5	

- (a) Completa a táboa seguinte para estes datos.

n , o número de observacións	20
Mediana	
Percorrido	
Percorrido intercuartílico	

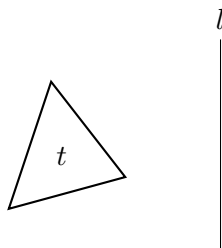
- (b) Debuxa un diagrama de sectores para representar estes datos. Usa as clases 50–59, 60–69, 70–79 e 80–89. Rotula claramente cada sector e a amplitude de cada ángulo. Amosa todos os teus cálculos.
- (c) A tenda rexistra o número de vendas de cada hora durante outras k horas. Cada unha destas k horas tivo vendas no intervalo 70–79. Cando as vendas destas k horas se combinaron coas vendas do diagrama de talo e follas da páxina anterior, o 32 % do número total de horas tivo vendas no intervalo 70–79. Calcula o valor de k .

2. (30 puntos) Unha empresa fabrica teléfonos móbiles.

- (a) A empresa fai unha enquisa a unha mostra aleatoria de n dos seus clientes, onde $n \in \mathbb{N}$. Baseándose nesta enquisa, a marxe de erro para a proporción da poboación, $\frac{1}{\sqrt{n}}$, é do 3,4 %, cun decimal. Acha un valor posíbel de n .
- (b) A empresa fabrica dous tipos de móbiles: un modelo antigo e un modelo novo. Próbese unha mostra aleatoria de 80 dos móbiles novos da empresa para ver canto tardan en cargarse de baleiro a cheo. O tempo medio desta mostra é de 45,4 minutos, cunha desviación típica de 3,1 minutos.
- (i) Usa esta información para achar un intervalo de confianza do 95 % para o tempo medio da poboación. Dá cada valor da resposta en minutos, cun decimal.
- (ii) O tempo medio que tarda en cargarse o modelo antigo de baleiro a cheo é de 44 minutos. A empresa di que o tempo medio que tarda en cargarse o modelo novo é o mesmo. Usando a túa resposta ao apartado (b)(i), ou doutro xeito, realiza un contraste de hipóteses cun nivel de significación do 5 % para contrastar a afirmación da empresa. Hipótese nula: O tempo medio que tarda en cargarse completamente o modelo novo é de 44 minutos.
Hipótese alternativa: _____
Conclusión: _____
Razón: _____
- (c) Noutra enquisa realizáronse dous contrastes de hipóteses cun nivel de significación do 5 %. O p -valor do primeiro contraste foi 0,046. O p -valor do segundo contraste foi 0,0002. Escribe unha frase que explique que significa a diferenza de tamaño destes p -valores sobre as conclusións destes dous contrastes.

3. (30 puntos)

- (a) Constrúe a imaxe do triángulo t mediante a simetría axial respecto de l . Amosa claramente todas as liñas de construción.



- (b) Un cono circular recto ten unha altura de h cm e un raio de $\frac{h}{4}$ cm, onde $h \in \mathbb{N}$ é unha constante. O volume do cono é $36\,000\pi$ cm³. Calcula o valor de h .

- (c) Un ortoedro ten arestas de lonxitude 24 cm, 36 cm e 60 cm. Este ortoedro está dentro dunha esfera, de xeito que os oito vértices (esquinas) do ortoedro están na superficie da esfera. Calcula o volume da esfera. Dá a resposta na forma $a\sqrt{38}\pi \text{ cm}^3$, onde $a \in \mathbb{N}$. Pode ser útil achar a lonxitude da diagonal interior do ortoedro.

4. (30 puntos) As rectas l e k teñen as seguintes ecuacións:

$$l : 3x - 2y = 0 \qquad k : y = -\frac{3}{2}x + 7$$

- (a) Son perpendiculares as rectas l e k ? Xustifica a resposta usando cálculos.
- (b) Unha recta ten ecuación $y = mx + 8$, onde $m \in \mathbb{R}$ é unha constante. Acha os conxuntos de valores de m para os que esta recta non corta o segmento que vai de $(3, 7)$ a $(3, 11)$.
- (c) P é o punto $(1, 0)$. A distancia perpendicular desde P á recta $ax + y - 5 = 0$ é 5, onde $a \in \mathbb{R}$ é unha constante. Acha os dous valores posíbeis de a .

5. (30 puntos)

- (a) A circunferencia c ten ecuación:

$$x^2 + y^2 + 4x - 10y - 52 = 0$$

Escribe o centro e o raio da circunferencia c .

Centro = (,) Raio = _____

- (b) Tres dados estándar non trucados de 6 caras están marcados con h , k e r . Gino lanza os tres dados e usa os números obtidos para formar a ecuación dunha circunferencia da forma:

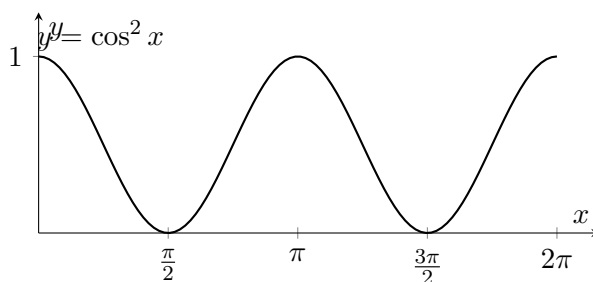
$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

onde h , k e r son os números que mostra cada dado. Cada conxunto diferente de valores de h , k e r dá unha circunferencia diferente.

- (i) Escribe un exemplo dun conxunto de números h , k e r que Gino podería obter e escribe a ecuación da circunferencia formada con eses números.
- (ii) En total, cantas circunferencias diferentes pode facer Gino deste xeito?
- (iii) Cantas destas circunferencias teñen tanto o eixe x como o eixe y como tanxentes?
- (iv) Cantas destas circunferencias están completamente dentro do primeiro cuadrante? (É dicir, cantas non tocan nin cortan nin o eixe x nin o eixe y ?)

6. (30 puntos)

- (a) θ é un ángulo agudo, con $\sin \theta = \frac{1}{4}$. Acha o valor de $\cos \theta$ sen usar calculadora. Dá a resposta en forma de radical.
- (b) O diagrama seguinte mostra a gráfica de $y = \cos^2 x$ nun dominio limitado.

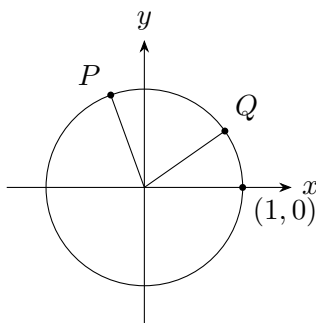


Debuxa e rotula no diagrama a gráfica de $y = \sin^2 x$, usando os mesmos eixes e escalas. Usa o feito de que $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$.

(c) Demostra que:

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

onde A e B son ángulos, con $A > B$. Pode ser útil usar dous puntos, P e Q , da circunferencia unidade.

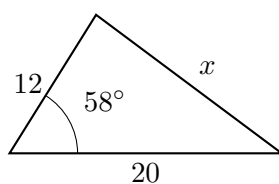


Paper 2 — Sección B: Contextos e aplicacións (150 puntos)

Responde calquera **tres** preguntas desta sección.

7. (50 puntos) Nesta pregunta, todas as lonxitudes están en cm. Áine ten 100 paus. Cada pau ten unha lonxitude enteira diferente, de 1 a 100, polo que as lonxitudes son: 1 cm, 2 cm, 3 cm, ..., 99 cm, 100 cm. Áine fai triángulos, usando tres destes paus cada vez.

(a) Áine fai o triángulo que se mostra a continuación, con lados de lonxitude 12, 20 e x , onde $x \in \mathbb{N}$. O ángulo entre os lados de lonxitude 12 e 20 é de 58° , arredondado ao grao.

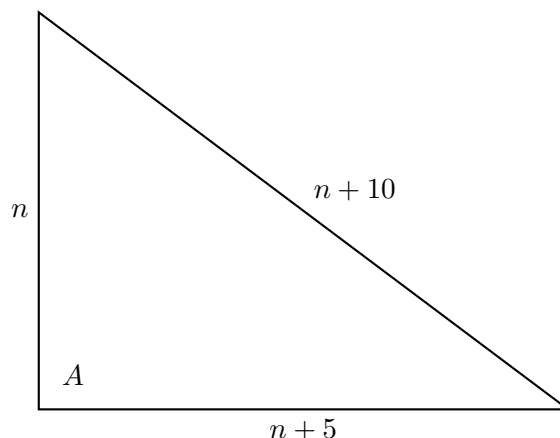


- (i) Acha a área do triángulo, arredondada ao cm^2 .
 - (ii) Acha o valor de $x \in \mathbb{N}$.
- (b) Áine tamén fai o triángulo que se mostra a continuación. Un lado ten unha lonxitude de 72 e outro ten unha lonxitude de y , onde $y \in \mathbb{N}$. Dous dos ángulos miden 34° e 59° , cada un arredondado ao grao.

[Nota: Figura: triángulo cun lado de lonxitude 72 e ángulos de 34° e 59° nos seus extremos; o lado y é un dos outros dous lados.]

Acha o valor de $y \in \mathbb{N}$.

(c) Áine fai varios triángulos diferentes con lados de lonxitude n , $n + 5$ e $n + 10$, onde $n \in \mathbb{N}$. O ángulo A está entre os lados de lonxitude n e $n + 5$.



- (i) $A = 90^\circ$ para un valor de $n \in \mathbb{N}$. Acha ese valor de n .
- (ii) Estima o límite da amplitude do ángulo A cando n tende a infinito. Escribe unha frase que xustifique a túa resposta. Só para este apartado, supón que n pode facerse extremadamente grande (máis de 100).
- (d) Áine fai outro triángulo con tres dos seus paus, con lados de lonxitude 12, 24 e 30. Acha cantos triángulos diferentes (non congruentes) podería facer Áine que fosen semellantes a este triángulo. Amosa o teu traballo. Lembra que Áine só usa tres paus para cada triángulo e que a lonxitude de cada pau é un número enteiro diferente de 1 a 100, ambos incluídos.
- 8. (50 puntos)** Esta pregunta trata sobre paneis solares. A gráfica seguinte mostra a enerxía producida cada día por certo número de paneis solares, en función do número de horas de luz diúrna. Os eixes non se cortan en $(0, 0)$. A enerxía producida mídese en kWh.
- [Nota: Figura: diagrama de dispersión (eixe horizontal: horas de luz diúrna; eixe vertical: enerxía producida en kWh).]
- (a) Cal dos seguintes valores está máis próximo ao valor de r , o coeficiente de correlación, para estes datos? Xustifica a resposta baseándote na información da gráfica.
- 0,95 -0,80 -0,25 0,25 0,80 0,95
- (b) Segundo a recta de mellor axuste, un día con 13 horas de luz diúrna corresponde a unha produción de 10,7 kWh de enerxía.
- (i) Representa un punto no diagrama da páxina anterior que corresponda a esta información. Rotula este punto como P .
- (ii) Debuxa a ollo a recta de mellor axuste no diagrama da páxina anterior. A túa recta de mellor axuste debe pasar polo punto P .
- (iii) Usa a recta de mellor axuste que debuxaches para estimar a cantidade de enerxía que se produciría nun día con 11 horas de luz diúrna. Amosa o teu traballo no diagrama.
- (iv) Acha a ecuación da recta de mellor axuste que debuxaches no apartado (b)(ii). Usa o punto P que representaches no apartado (b)(i) e a túa resposta ao apartado (b)(iii). Dá a resposta na forma $y = a + bx$, onde $x \in \mathbb{R}$ é o número de horas de luz diúrna, y é a enerxía producida (en kWh), e a e b son constantes.
- (c) Hai 128 paneis solares na granxa solar de Lee. Cada semana escolle ao chou 2 dos 128 paneis para probalos. Acha a probabilidade de que, nunha semana dada, escolla polo menos un dos mesmos paneis que escolleu a semana anterior. Dá a resposta con 3 cifras decimais.
- (d) O número de horas de luz diúrna ao día na granxa solar ao longo dun ano pódese modelizar mediante a seguinte función $H(t)$, para $0 \leq t \leq 365$, $t \in \mathbb{Z}$:

$$H(t) = 4,5 \sin\left(\frac{2\pi}{365} t\right) + 12$$

Aquí, H está en horas, t é o número de días despois do 21 de marzo, e $\frac{2\pi}{365}t$ está en radiáns.

- (i) Usa $H(t)$ para achar o número de horas de luz diúrna o 28 de marzo. Dá a resposta con 2 cifras decimais.
- (ii) Usando $H(t)$, resolve unha ecuación para achar o primeiro día (valor de t) e o último día (valor de t), despois do 21 de marzo, nos que o número de horas de luz diúrna é menor que 8. Dá cada resposta como un valor de $t \in \mathbb{Z}$, con $0 \leq t \leq 365$. Non é necesario que aches a data real de cada día.

9. **(50 puntos)** Esta pregunta trata sobre un sistema de transmisión por correa. No diagrama, a correa é o camiño de A a D , a C , a B e de volta a A , formado por dous segmentos e dous arcos maiores de circunferencia.

[Nota: Figura: dúas circunferencias, k (centro P , á esquerda) e s (centro Q , á dereita). A e B están en k ; C e D en s . A correa está cruzada: os segmentos AD e BC son tanxentes comúns ás dúas circunferencias e córtanse no punto O , situado no segmento PQ .]

- (a) As circunferencias k e s teñen centros P e Q , respectivamente. A e B son puntos de k , e C e D son puntos de s . AD e BC son tanxentes ás dúas circunferencias, como se mostra, e córtanse no punto O , que está en PQ . Completa a táboa seguinte para demostrar que os triángulos PAO e PBO son congruentes. Faltan dúas afirmacións e catro razóns.

Afirmación	Razón
1. $ PA = PB $	
2.	
3.	
Polo tanto, os triángulos PAO e PBO son congruentes.	

- (b) $|PA| = 12$ cm e $|\angle APO| = 70^\circ$.

- (i) Acha a distancia $|AO|$, cun decimal.
- (ii) Os triángulos PAO e QCO son semellantes, e $|QC| = 8$ cm. Acha a lonxitude total da correa, é dicir, do camiño de A a D , a C , a B e de volta a A . Dá a resposta arredondada ao cm.

- (c) A correa empaquétase nunha caixa pechada. O desenvolvemento (planta) da caixa é a parte sombreada do diagrama seguinte.

[Nota: Figura: unha folla rectangular de cartón de 55 cm $\times$ 120 cm, coa planta da caixa sombreada; a altura da caixa montada está marcada como x cm e hai dúas lonxitudes marcadas j e k .]

Acha o volume da caixa montada. Dá a resposta na forma $ax^3 + bx^2 + cx$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ son constantes. Como parte da túa solución, expresa as lonxitudes marcadas j e k en función de x .

- (d) A correa forma parte dun cortador de céspede robot. Úsase para cortar a herba da rexión que se mostra no diagrama seguinte. O perímetro desta rexión está formado por varios segmentos, máis o arco dun cuarto de circunferencia de A a B co seu centro no lado BC . BC está dividido en seis segmentos de igual lonxitude. A lonxitude, en metros, de cinco segmentos móstrase no diagrama. Cada un destes segmentos é perpendicular a BC .

[Nota: Figura: os cinco segmentos perpendiculares a BC miden, de esquerda a dereita, 6,7; 9,1; 10,2; 8,8; 8,8 m.]

Liam usa a regra dos trapezios para estimar a área total desta rexión. Achando a área total real, ou doutro xeito, calcula o erro na estimación de Liam da área total desta rexión.

- (a) A cantidade de diñeiro que gasta en lecer ao mes a poboación adulta dunha cidade determinada segue aproximadamente unha distribución normal, cunha media de 46,02 € e unha desviación típica de 11,72 €.
- Calcula a porcentaxe da poboación adulta que gasta máis de 50 € ao mes en lecer.
 - O 90 % da poboación adulta gasta menos de X € ao mes en lecer. Calcula o valor de X , arredondado ao número enteiro máis próximo.
- (b) Nun xogo, cada xogador quere conseguir tantas fichas como sexa posíbel. Cando cada xogador ten a súa quenda, lanza unha vez un dado estándar non trucado de 6 caras. Se saca un 1, 2, 3 ou 4, non consegue nada; se saca un 5 ou un 6, consegue 1 ficha.
- Escribe a probabilidade de que un xogador consiga 1 ficha na súa primeira quenda. Amelie xoga a súa quenda 5 veces en total.
 - Calcula a probabilidade de que consiga 1 ficha por primeira vez na súa 5.^a quenda.
 - Calcula a probabilidade de que consiga 4 ou máis fichas nas súas 5 quendas.
- (c) Cámbianse as regras do xogo. Cada vez que un xogador ten a súa quenda, se saca un 1, 2, 3 ou 4, segue sen conseguir nada. Se saca un 5 ou un 6, pode escoller. Pode ou ben:
- coller 1 ficha e rematar a súa quenda, ou ben:
 - lanzar o dado outra vez, como parte da mesma quenda.
- Se esta vez saca un 1, 2, 3 ou 4, non consegue absolutamente nada nesta quenda. Se saca un 5 ou un 6, consegue un total de 4 fichas nesta quenda. Sexa p a probabilidade de que un xogador que saca un 5 ou un 6 na primeira tirada colla 1 ficha e remate a súa quenda, onde $0 \leq p \leq 1$.
- Calcula o valor esperado (en fichas) de xogar unha quenda con estas regras. Dá a resposta na forma $\frac{a+bp}{9}$, onde a e b son constantes.
 - O valor esperado do apartado (c)(i) é máximo cando $p = 0$. Explica que significa isto sobre o que debería facer cada xogador para maximizar o valor esperado (en fichas) de cada quenda.

Solucións

Paper 1 — Sección A

Pregunta 1. a) $\sqrt{a+7} = 4 \Rightarrow a+7 = 16 \Rightarrow \boxed{a=9}$ (válida: $9 \geq -7$ e $1 + \sqrt{16} = 5$).

b) $\frac{2}{p} = 3s - \frac{1}{n} = \frac{3sn-1}{n} \Rightarrow \boxed{p = \frac{2n}{3sn-1}}$ (con $3sn > 1$, pois $p > 0$).

c) Dividindo, $8x^3 + 6x^2 - 44x + 30 = (2x^2 + 4x - 6)(4x - 5) = 2(x-1)(x+3)(4x-5)$, logo $\boxed{x=1, x=-3, x=\frac{5}{4}}$.

Pregunta 2. a) $4,\overline{36} = 4 + \frac{36}{100} + \frac{36}{100^2} + \dots = 4 + \frac{0,36}{1-0,01} = 4 + \frac{36}{99} = 4 + \frac{4}{11} = \boxed{\frac{48}{11}}$.

b) (i) Se i é a taxa mensual, $(1+i)^{12} = 1,084 \Rightarrow i = 1,084^{1/12} - 1 = 0,006744\dots \approx 0,67\%$.

(ii) Valor actual dunha renda: $14\,000 = A \sum_{k=1}^{60} 1,0067^{-k} \Rightarrow A = \frac{14\,000 \cdot 0,0067}{1 - 1,0067^{-60}}$.

$$\boxed{A = 284,14 \text{ €}}, \quad \text{xuros} = 60 \cdot 284,14 - 14\,000 = \boxed{3048,40 \text{ €}}.$$

- Pregunta 3.** a) $f'(x) = 14x \cos(3x) - 21x^2 \sin(3x)$; como $\cos 3\pi = -1$, $\sin 3\pi = 0$: $f'(\pi) = -14\pi$.
- b) (i) $g'(x) = 15x^2 - 18x + C$; $g'(-1) = 15 + 18 + C = -2 \Rightarrow C = -35$: $g'(x) = 15x^2 - 18x - 35$.
- (ii) $g(x) = 5x^3 - 9x^2 - 35x + D$; $g(-1) = -5 - 9 + 35 + D = 8 \Rightarrow D = -13$: $g(x) = 5x^3 - 9x^2 - 35x - 13$.

- Pregunta 4.** a) $\bar{u} = 3 + 7i$, $2\bar{u} + 5i = 6 + 19i$.
- b) $3 - \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i \sin(-\frac{\pi}{6}))$. Por De Moivre, $(3 - \sqrt{3}i)^8 = (2\sqrt{3})^8(\cos(-\frac{4\pi}{3}) + i \sin(-\frac{4\pi}{3})) = 20736(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = -10368 + 10368\sqrt{3}i$.
- c) $|w| = |a| = 5$, p. ex. $a = 5$. $v = -15 = 15(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)$: $a = 5$, $b = 15$, $\theta = 180^\circ$ (outras: $a = -5$; $b = -15$, $\theta = 0^\circ$; $\theta = 180^\circ + 360^\circ k$).

- Pregunta 5.** a) $64 = 4^3$, $1 = 4^0$, $16 = 4^2$, $2 = 4^{1/2}$.
- b) (i) $64 = 4^3$ e $64 = 4 \cdot 16$: $A \cap B$ (fóra de D). $\frac{1}{16} = 4^{-2}$: só B . $\sqrt{2} = 4^{1/4}$: $B \cap D$. $12 = 4 \cdot 3$, e $4^r = 12$ non ten r racional ($2^{2r} = 12$ con $r = p/q$ daría $2^{2p} = 12^q$, imposíbel polo factor 3): só A . $1 = 4^0$: só B . $\sqrt{3}$: irracional; se $4^{p/q} = \sqrt{3}$ entón $2^{4p} = 3^q$, imposíbel: só D .
- (ii) P. ex. $\frac{3}{2}$: é racional, non é múltiplo de 4 e $4^r = 3$ non ten solución racional (igual argumento). (Non valería $\frac{1}{2} = 4^{-1/2} \in B$.)
- c) $k = \log_4 9 = \frac{\log_3 9}{\log_3 4} = \frac{2}{\log_3 4} (= \frac{1}{\log_3 2} \approx 1,585)$.

- Pregunta 6.** a) Base $n = 7$: $7! = 5040 > 2187 = 3^7$. Paso: supoñamos $k! > 3^k$ para un $k \geq 7$. Entón $(k+1)! = (k+1)k! > (k+1)3^k > 3 \cdot 3^k = 3^{k+1}$, pois $k+1 \geq 8 > 3$. Polo principio de indución, $n! > 3^n$ para todo $n \geq 7$. $\square$
- b) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = n(n+1) = 156 \Rightarrow n^2 + n - 156 = (n-12)(n+13) = 0 \Rightarrow n = 12$.
- c) Sexa $T_1 = a$, razón r . $a(1+r) = 2$ e $S_3 = 2 + ar^2 < 2 \Rightarrow ar^2 < 0 \Rightarrow a < 0$, e daquela $1+r < 0$, i.e. $r < -1$. Con $r = -2$: $a = -2$.

$$T_1 = -2, T_2 = 4, T_3 = -8, S_3 = -6$$

(cúmprese $T_1 < 2$, $T_1 + T_2 = 2$, $S_3 < 2$; calquera $r < -1$, $a = 2/(1+r)$ vale).

Paper 1 — Sección B

- Pregunta 7.** a) $V(60) = 5400 - 32400 + 33048 + 68900 = 74948 \text{ cm}^3$.
- b) $V'(t) = 0,075t^2 - 18t + 550,8$; $V'(150) = 1687,5 - 2700 + 550,8 = -461,7 \text{ cm}^3/\text{s}$.
- c) $V'(t) < 0 \iff t^2 - 240t + 7344 < 0 \iff (t-36)(t-204) < 0$: $36 < t < 204$ (s).
- d) $V = \pi 26^2 h = 676\pi h \Rightarrow \frac{dV}{dh} = 676\pi$. $\frac{dh}{dt} = \frac{dV/dt}{dV/dh} = \frac{-461,7}{676\pi} = -0,22 \text{ cm/s}$ (a altura baixa).
- e) $C(h) = \frac{20}{\pi(16h - h^2)}$, $C'(h) = -\frac{20\pi(16-2h)}{\pi^2(16h-h^2)^2} = 0 \iff h = 8$. $C' < 0$ para $h < 8$ e $C' > 0$ para $h > 8$: mínimo local $C(8) = \frac{20}{64\pi} = 0,0995 \dots \approx 0,1 \text{ cm/s}$.
- f) O denominador anúlase en $h = 0$ e $h = 16$ (e é positivo entre eles), logo $M = 16$.

Pregunta 8. a) $F(11) = 440 \cdot 2^{11/12} = 830,6 \dots \approx \boxed{831 \text{ Hz}}$.

b) $F(-6) = 440 \cdot 2^{-1/2} = 220\sqrt{2} = \boxed{311,1 \text{ Hz}}$.

c) $2^{x/12} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 12 \log_2 1,5 = \boxed{7,02}$.

d) $F'(x) = 440 \cdot 2^{x/12} \cdot \frac{\ln 2}{12}$.

e) (i) Aproximación lineal (tanxente): $G(k+2) \approx G(k) + 2G'(k) = 197 + 11,6 = \boxed{208,6}$.

(ii) $G''(x) = Ab^2e^{bx} > 0$: G é convexa e a súa gráfica está por riba da tanxente, logo a estimación é **demasiado pequena**.

f) $S + A = 3(T + B)$ e $S + A + T + B = 384 \Rightarrow T + B = 96$, $S + A = 288$. Con $A = 2S$: $S = 96$, $A = 192$; con $T = B + 12$: $B = 42$, $T = 54$.

96 sopranos, 192 contraltos, 54 tenores, 42 baixos

Pregunta 9. A serie n ten os largos $20, 40, \dots, 20(n+1), \dots, 40, 20$: $2n+1$ largos.

a) Serie 2: distancia 180; Serie 3: 7 largos; Serie 4: 20 40 60 80 100 80 60 40 20, 9 largos, 500 m.

b) Na Serie 14 os largos crecen ata o 15.º (300 m); o 12.º mide $20 \cdot 12 = \boxed{240 \text{ m}}$.

c) $D_n = 20[(1 + \dots + (n+1)) + (1 + \dots + n)] = 20\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}\right] = 20(n+1)^2 = \boxed{20n^2 + 40n + 20}$ (comproba: 80, 180, 320, 500).

d) A serie h é simétrica respecto do largo $h+1$; os largos i e j miden igual se $i+j=2(h+1)$: $64=2h+2 \Rightarrow \boxed{h=31}$ (ten 63 largos).

e) Serie 18: 37 largos, máximo 380 m no largo 19. Para $19 \leq k \leq 37$: $L_k = 20(38-k) = 760 - 20k$ m.

f) Epley: $\frac{7}{6}w$; Brzycki: $\frac{36}{32}w = \frac{9}{8}w$. Diferenza: $\frac{7}{6}w - \frac{9}{8}w = \boxed{\frac{w}{24}}$ kg.

g) $1 + \frac{r}{30} = \frac{36}{37-r} \Rightarrow (30+r)(37-r) = 1080 \Rightarrow r^2 - 7r - 30 = 0 \Rightarrow (r-10)(r+3) = 0$. Como $r > 0$: $\boxed{r=10}$.

Pregunta 10. a) (i) $y = g(x) + 3$ é a gráfica de g trasladada **3 unidades cara arriba** (2 unidades por riba de $g(x) + 1$). (ii) $y = h(x+2)$ é a gráfica de h trasladada **2 unidades cara á esquerda** (3 unidades á esquerda de $h(x-1)$).

[Nota: Descríbese a transformación que hai que aplicar ás curvas dadas.]

b)

[Nota: Do apartado (d): f é lineal a anacos e só non é derivábel en 1, 2, 5 dentro de $(0, 6)$. Se o período fose P , os puntos angulosos repetiríanse con período P ; $P=3$ ou $P=4$ son incompatíbeis (darían ángulos en 4, ou un tramo que non pecha), mentres que $P=5$ dá exactamente $\{1, 2, 5\}$ en $(0, 6)$, con 0 e 5 angulosos. Daquela f sobe 3 en $(0, 1)$, é constante en $(1, 2)$ e en $(2, 5)$ ten pendente s con $3+0+3s=0$, $s=-1$.]

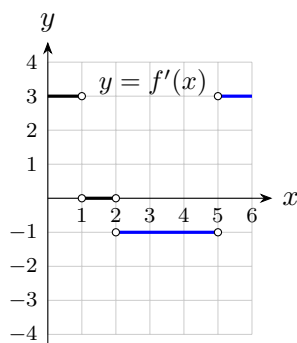
(i) Período $\boxed{5}$. (ii) Calquera múltiplo non nulo do período: p. ex. $\boxed{n=5, 10, -5}$.

c) Con $c = f(0)$: $f(x) = c + 3x$ en $[0, 1]$, $f = c + 3$ en $[1, 2]$, $f(x) = c + 5 - x$ en $[2, 5]$.

$$\int_0^3 f = \underbrace{\frac{3}{2}}_{[0,1]} + \underbrace{3}_{[1,2]} + \underbrace{\frac{3+2}{2}}_{[2,3]} + 3c = 7 + 3c.$$

[Nota: Supoñemos $f(0) = -1$ (gráfica entre -1 e 2 , dentro da escala vertical de -2 a 2), que dá $\int_0^3 f = \boxed{4}$; se fose $f(0) = -2$, o resultado sería 1 .]

d) Pendente -1 en $(2, 5)$ e 3 en $(5, 6)$ (repetición do tramo $(0, 1)$):



e) $\int_1^a [j(x) + b] dx = 200 + b(a - 1) = \boxed{200 + ab - b}$.

f) (i) $h(x+1) - h(x) = 2ax + a + b = 2$ para todo $x \iff 2a = 0, a + b = 2$: $\boxed{a = 0, b = 2}$.

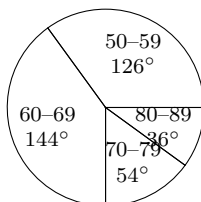
(ii) $h(x) = 2x + c$: a gráfica non é unha parábola senón unha **recta de pendente 2** (calquera ordenada na orixe c).

Paper 2 — Sección A

Pregunta 1. Datos ordenados: 54, 54, 55, 55, 57, 57, 58, 62, 63, 63, 64, 65, 67, 69, 69, 70, 73, 77, 80, 85.

a) $n = 20$; mediana $= \frac{63+64}{2} = \boxed{63,5}$; percorrido $= 85 - 54 = \boxed{31}$; $Q_1 = \frac{57+57}{2} = 57$, $Q_3 = \frac{69+70}{2} = 69,5$, PIQ $= \boxed{12,5}$.

b) Frecuencias 7, 8, 3, 2; ángulos $\frac{f}{20} \cdot 360^\circ$: 126° , 144° , 54° , 36° .



c) $\frac{3+k}{20+k} = 0,32 \Rightarrow 3+k = 6,4 + 0,32k \Rightarrow 0,68k = 3,4 \Rightarrow \boxed{k = 5}$.

Pregunta 2. a) $\frac{1}{\sqrt{n}} = 0,034 \Rightarrow n = \frac{1}{0,034^2} = 865,05$: $\boxed{n = 865}$ (vale calquera $841 \leq n \leq 891$, pois $0,0335 \leq \frac{1}{\sqrt{n}} < 0,0345$).

b) (i) $\bar{x} \pm 1,96 \frac{s}{\sqrt{n}} = 45,4 \pm 1,96 \cdot \frac{3,1}{\sqrt{80}} = 45,4 \pm 0,68$: $\boxed{44,7 \leq \mu \leq 46,1}$ min.

(ii) H_1 : o tempo medio de carga do modelo novo *non* é 44 min ($\mu \neq 44$). Conclusión: **rexéitase** H_0 ; a afirmación da empresa non se sostén ao 5%. Razón: 44 non está no intervalo de confianza do 95 % (equivalentemente $z = \frac{45,4-44}{3,1/\sqrt{80}} = 4,04 > 1,96$).

c) Os dous p -valores son menores que 0,05, así que nos dous contrastes se rexeita H_0 ; pero 0,0002 indica unha evidencia moito máis forte contra H_0 ca 0,046, que está xusto no límite.

Pregunta 3. a) Construción: desde cada vértice de t trázase a perpendicular a l (con compás: arco centrado no vértice que corte l en dous puntos e mediatriz deles); na perpendicular, ao outro

lado de l , lévase coa mesma abertura a distancia do vértice a l . Unindo as tres imaxes obtense t' , congruente a t e con orientación invertida.

b) $\frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{4}\right)^2 h = \frac{\pi h^3}{48} = 36\,000\pi \Rightarrow h^3 = 1\,728\,000 \Rightarrow \boxed{h = 120}$.

c) A diagonal interior é un diámetro: $d = \sqrt{24^2 + 36^2 + 60^2} = \sqrt{5472} = 12\sqrt{38}$, $R = 6\sqrt{38}$.
 $V = \frac{4}{3}\pi(6\sqrt{38})^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 216 \cdot 38\sqrt{38} = \boxed{10\,944\sqrt{38}\pi \text{ cm}^3}$.

Pregunta 4. a) $m_l = \frac{3}{2}$, $m_k = -\frac{3}{2}$; $m_l m_k = -\frac{9}{4} \neq -1$: **non** son perpendiculares.

b) En $x = 3$ a recta pasa por $y = 3m + 8$. Corta o segmento se $7 \leq 3m + 8 \leq 11 \iff -\frac{1}{3} \leq m \leq 1$.
 Non o corta para $\boxed{m < -\frac{1}{3} \text{ ou } m > 1}$.

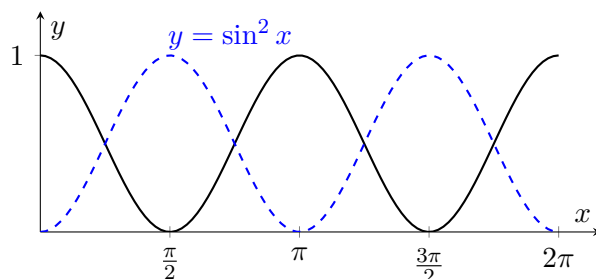
c) $\frac{|a \cdot 1 + 0 - 5|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 5 \Rightarrow (a - 5)^2 = 25(a^2 + 1) \Rightarrow 24a^2 + 10a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0 \text{ ou } a = -\frac{5}{12}}$.

Pregunta 5. a) $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 52 + 4 + 25 = 81$: centro $\boxed{(-2, 5)}$, raio $\boxed{9}$.

b) (i) P. ex. $h = 2$, $k = 3$, $r = 1$: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$. (ii) $6^3 = \boxed{216}$. (iii) Tanxente aos dous eixes $\iff h = r$ e $k = r$: $\boxed{6}$. (iv) Interior estricto ao primeiro cuadrante $\iff h > r$ e $k > r$:
 $\sum_{r=1}^5 (6 - r)^2 = 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = \boxed{55}$.

Pregunta 6. a) $\cos \theta = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ (θ agudo).

b) $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$: simétrica de $y = \cos^2 x$ respecto da recta $y = \frac{1}{2}$ (equivale a trasladala $\frac{\pi}{2}$); vale 0 en $0, \pi, 2\pi$ e 1 en $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$; corta a $\cos^2 x$ en $y = \frac{1}{2}$ en $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$.



c) Sexan $P = (\cos A, \sin A)$ e $Q = (\cos B, \sin B)$ na circunferencia unidade de centro O ; o ángulo POQ mide $A - B$ (ou $360^\circ - (A - B)$, co mesmo coseno). Pola fórmula da distancia:

$$|PQ|^2 = (\cos A - \cos B)^2 + (\sin A - \sin B)^2 = 2 - 2(\cos A \cos B + \sin A \sin B).$$

Polo teorema do coseno no triángulo OPQ ($|OP| = |OQ| = 1$): $|PQ|^2 = 1 + 1 - 2\cos(A - B)$. Igualando, $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$. (Se P, O, Q están aliñados, $A - B = 180^\circ$ e a igualdade compróbase directamente: $|PQ|^2 = 4$.) $\square$

Paper 2 — Sección B

Pregunta 7. a) (i) $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 20 \sin 58^\circ = 101,8 \approx \boxed{102 \text{ cm}^2}$. (ii) $x^2 = 12^2 + 20^2 - 2 \cdot 12 \cdot 20 \cos 58^\circ = 289,6 \Rightarrow x = 17,02 \Rightarrow \boxed{x = 17}$.

b) O terceiro ángulo mide $180^\circ - 34^\circ - 59^\circ = 87^\circ$. Se o lado 72 está entre os ángulos de 34° e 59° (oposto a 87°), pola lei dos senos:

$$y = \frac{72 \sin 34^\circ}{\sin 87^\circ} = 40,3 \Rightarrow \boxed{y = 40} \quad \text{ou} \quad y = \frac{72 \sin 59^\circ}{\sin 87^\circ} = 61,8 \Rightarrow y = 62,$$

segundo y sexa oposto a 34° ou a 59° .

[Nota: Se o lado 72 fose oposto a un dos ángulos dados, as opcións con $y \leq 100$ serían $y = \frac{72 \sin 34^\circ}{\sin 59^\circ} = 47,0 \rightarrow 47$ ou $y = \frac{72 \sin 87^\circ}{\sin 59^\circ} = 83,9 \rightarrow 84$. O método (suma de ángulos e lei dos senos) é o mesmo.]

- c) (i) $n^2 + (n+5)^2 = (n+10)^2 \Rightarrow n^2 - 10n - 75 = (n-15)(n+5) = 0 \Rightarrow \boxed{n=15}$ (triángulo 15, 20, 25). (ii) $\cos A = \frac{n^2 + (n+5)^2 - (n+10)^2}{2n(n+5)} = \frac{n^2 - 10n - 75}{2n^2 + 10n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$, logo $A \rightarrow \boxed{60^\circ}$: para n moi grande as diferenzas de 5 e 10 son desprezábais fronte a n e o triángulo é case equilátero.
- d) $12 : 24 : 30 = 2 : 4 : 5$. Os semellantes con lados enteiros distintos son $2m, 4m, 5m$ con $5m \leq 100$, $m \in \mathbb{N}$ (para m non enteiro algún lado deixaría de ser enteiro, pois $2m, 4m, 5m \in \mathbb{N} \Rightarrow m = 5m - 4m \in \mathbb{N}$). Así $m = 1, \dots, 20$: **20 triángulos** (19 ademais do de lados 12, 24, 30, que é $m = 6$).

Pregunta 8. [Nota: Os apartados (a) e (b) dependen dos datos concretos do diagrama de dispersión; indícase o método.]

a) Cabe esperar unha correlación lineal *positiva* (máis horas de luz, máis enerxía); a elección entre 0,80 e 0,95 depende da dispersión da nube: 0,95 se os puntos están moi próximos a unha recta crecente, 0,80 se hai dispersión apreciable. Os valores negativos descártanse porque a nube é crecente.

b) (i) $P = (13; 10,7)$. (ii) Recta a ollo por P que deixe aproximadamente tantos puntos por riba como por debaixo. (iii) Lese na recta o valor y_{11} en $x = 11$. (iv) Con P e $(11, y_{11})$: $b = \frac{10,7 - y_{11}}{2}$, $a = 10,7 - 13b$, e $y = a + bx$.

c) $P(\text{ningún repetido}) = \frac{\binom{126}{2}}{\binom{128}{2}} = \frac{126 \cdot 125}{128 \cdot 127}$, logo $P(\text{polo menos un}) = 1 - \frac{15750}{16256} = \frac{253}{8128} = \boxed{0,031}$.

d) (i) O 28 de marzo é $t = 7$: $H(7) = 4,5 \sin \frac{14\pi}{365} + 12 = \boxed{12,54 \text{ h}}$. (ii) $H(t) = 8 \iff \sin \frac{2\pi t}{365} = -\frac{8}{9}$. Con $\alpha = \arcsin \frac{8}{9} = 1,0949$: $\frac{2\pi t}{365} = \pi + \alpha = 4,2365$ ou $2\pi - \alpha = 5,1883$, i.e. $t = 246,1$ ou $t = 301,4$. $H < 8$ para $246,1 < t < 301,4$ ($H(246) = 8,004$, $H(247) = 7,969$, $H(301) = 7,986$, $H(302) = 8,022$):

primeiro día $t = 247$, último día $t = 301$.

Pregunta 9. a)

Afirmación	Razón
1. $ PA = PB $	Raios de k .
2. $ \angle PAO = \angle PBO = 90^\circ$	A tanxente é perpendicular ao raio no punto de tanxencia.
3. $ PO = PO $	Lado común (hipotenusa).
Polo tanto, $PAO \cong PBO$.	Criterio RHS (ángulo recto, hipotenusa, cateto).

b) (i) No triángulo rectángulo PAO : $|AO| = 12 \tan 70^\circ = 32,97 \approx \boxed{33,0 \text{ cm}}$.

(ii) Razón de semellanza $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$: $|OD| = |OC| = \frac{2}{3}|AO|$, logo $|AD| = |BC| = \frac{5}{3}|AO| = 54,95 \text{ cm}$. Como $|\angle APB| = 2 \cdot 70^\circ = 140^\circ$ e, por semellanza, $|\angle CQD| = 140^\circ$, os arcos maiores abranguen 220° :

$$L = 2(54,95) + 2\pi \cdot 12 \cdot \frac{220}{360} + 2\pi \cdot 8 \cdot \frac{220}{360} = 109,90 + 46,08 + 30,72 = 186,7 \approx \boxed{187 \text{ cm}}.$$

c)

[Nota: Supoñemos a planta habitual dunha caixa pechada nunha folla de 55×120 : no ancho, dúas abas de altura x e a base, $j = 55 - 2x$; no longo, dúas alturas e base máis tapa, $2x + 2k = 120$, $k = 60 - x$.]

$j = 55 - 2x$, $k = 60 - x$, e

$$V = x(55 - 2x)(60 - x) = \boxed{2x^3 - 175x^2 + 3300x} \text{ cm}^3.$$

d)

[Nota: O resultado numérico depende da lonxitude de BC (ou do raio do arco), das ordenadas extremas e da forma da rexión dadas na figura; indícase o método.]

Método: con ancho de banda $w = \frac{|BC|}{6}$ e ordenadas $y_0, \dots, y_6$ ($y_1 \dots y_5 = 6,7; 9,1; 10,2; 8,8; 8,8$), a estimación de Liam é

$$\mathcal{A}_T = \frac{w}{2} [y_0 + y_6 + 2(6,7 + 9,1 + 10,2 + 8,8 + 8,8)] = \frac{w}{2} (y_0 + y_6 + 87,2).$$

Nas bandas limitadas por segmentos rectos a regra dos trapeacios é exacta, polo que o erro procede só das bandas baixo o arco: erro = (área exacta baixo o cuarto de circunferencia, $\frac{\pi R^2}{4}$ menos as partes rectas correspondentes) – (trapeacios desas bandas). Como o arco é cóncavo cara abaixo, a regra dos trapeacios *infravalora* esa parte.

Pregunta 10. a) (i) $z = \frac{50-46,02}{11,72} = 0,34$; $P(Z > 0,34) = 1 - 0,6331 = 0,3669$: $\boxed{36,69\%}$. (ii) $P(Z < z) = 0,90 \Rightarrow z = 1,28$; $X = 46,02 + 1,28 \cdot 11,72 = 61,02$: $\boxed{X = 61 \text{ €}}$.

b) (i) $P = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$. (ii) Fracasa catro veces e acerta na 5.^a: $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \frac{1}{3} = \boxed{\frac{16}{243} \approx 0,0658}$. (iii) Binomial $B(5, \frac{1}{3})$: $\binom{5}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^4 \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{10+1}{243} = \boxed{\frac{11}{243} \approx 0,0453}$.

c) (i) Con prob. $\frac{1}{3}$ saca 5 ou 6; entón, con prob. p colle 1 ficha e, con prob. $1 - p$, volve tirar e gaña 4 con prob. $\frac{1}{3}$:

$$E = \frac{1}{3} \left[p \cdot 1 + (1 - p) \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 \right] = \frac{3p + 4 - 4p}{9} = \boxed{\frac{4 - p}{9}} \quad (a = 4, b = -1).$$

(ii) E decrece con p ; o máximo ($E = \frac{4}{9} > \frac{1}{3}$) dáse con $p = 0$: cada vez que saque un 5 ou un 6 o xogador debería **volver tirar sempre** en vez de coller a ficha.

10 España (Catalunya)

PISA 2025, matemáticas: 474 puntos (Catalunya; dato publicado á parte e non comparábel, pola exclusión do 23 % da mostra; España: 457)

Dificultade relativa estimada: 6/10 (posto 7 dos 25 exames analizados; PAU de Galiza = 5)

Exame: Probas de Acceso á Universidade (PAU) de Catalunya — Matemáticas (equivalente a Matemáticas II)

Nome orixinal: *Proves d'accés a la Universitat (PAU) — Matemàtiques, sèrie 1*

Ano e convocatoria: 2026, convocatoria ordinaria (10 de xuño de 2026)

Duración: 1 hora e 30 minutos **Calculadora:** permitida, pero non os aparellos que poidan almacenar datos ou transmitir e recibir información

Estrutura e cualificación: catro exercicios de 2,5 puntos (total 10). Os exercicios 1, 2 e 3 son obrigatorios en todos os seus apartados; no exercicio 4 escóllese unha de dúas opcións (A: optimización; B: xeometría no espazo). Non hai máis optatividade.

Contexto: Exame común para todas as universidades catalás, organizado polo Departament de Recerca i Universitats e o Consell Interuniversitari de Catalunya; a nota da PAU (60 % coa media do bacharelato, 40 %) e as ponderacións da fase específica determinan o acceso. Este exame xerou unha forte polémica: o alumnado queixouse da súa lonxitude e da redacción (sobre todo os exercicios 2.3 e 3), unha petición en Change.org pediu a súa revisión, chegou ao Parlament e a nota media foi 4,18, a máis baixa en polo menos unha década (6,12 en 2025) e a única materia suspensa na convocatoria. O dato PISA de Catalunya (474) publicouse á parte co aviso de que non é comparábel, pola taxa de exclusión do 23 % da mostra (máximo OCDE: 5 %); España: 457.

Fonte: https://universitats.gencat.cat/web/.content/06_pau/examens-correccions/2026/matematiques/ord/pau_mate26jl.pdf; <https://img.beteve.cat/wp-content/uploads/2026/06/enunciat-matematiques-pau-selectivitat-2026-1.pdf> e <https://img.beteve.cat/wp-content/uploads/2026/06/correccions-matematiques-pau-selectivitat-2026-a.pdf>; https://www.ebaumatematicas.com/wp-content/uploads/2026/06/2oBachCC_EBAU_Cataluna_2026-Ordinaria_Serie-1_Resuelto_JuanAntonioMG.pdf. Polémica: <https://www.3cat.cat/3catinfo/lexamen-de-les-matematiques-de-la-selectivitat-2026-dificil-o-llarg/noticia/3414500/>, <https://www.3cat.cat/3catinfo/recullen-firmes-perque-es-revisi-lexamen-de-mates-de-les-pau-era-practicament-impossible-dacabar/noticia/3417380/>, <https://naciodigital.cat/next/vida/suspens-general-a-les-matematiques-de-la-selectivitat-2026-un-418-de-mitjana-i-la-mes-baixa-en-com-a-minim-una-decada.html>

Instrucións

O exame consta de CATRO exercicios obrigatorios. Cada exercicio vale 2,5 puntos. Fai os exercicios 1, 2 e 3 respondendo a TODAS as cuestións que se formulan. No exercicio 4, escolle UNHA das dúas opcións (A ou B) propostas e indícaa na portada.

Explica sempre o que queres facer e por que. Redacta con coherencia, corrección e claridade, empregando a notación e o vocabulario matemático axeitados, e expresa a solución de maneira clara.

Podes utilizar as páxinas en branco para facer esquemas e borradores. Se necesitas máis espazo para completar un exercicio, indícao claramente. Podes utilizar calculadora, pero non se autoriza o uso de aparellos que poidan almacenar datos ou transmitir ou recibir información.

[Nota: As puntuacións dos apartados 1.2, 2.1, 2.2, 3.1 e 3.2, que non figuran no enunciado, son as das pautas de corrección oficiais.]

Enunciados

1. Consideremos a seguinte función definida a anacos, onde m é un parámetro real: **(2,5 puntos)**

$$f(x) = \begin{cases} 5e^{2x} & \text{se } x < 0, \\ (x+m)^2 + 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 2, \\ 1 & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

- 1.1. **[1 punto]** Determina os valores de m que fan que a función $f(x)$ sexa continua en todo o seu dominio. Xustifica a resposta.
 - 1.2. **[1 punto]** Fai un esbozo da gráfica de $y = f(x)$ para o caso $m = -2$, e calcula a área delimitada por esta gráfica, o eixe OX e as rectas $x = -1$ e $x = 3$.
 - 1.3. **[0,5 puntos]** Para $m = -2$, atopa un punto onde a recta tanxente a $y = f(x)$ sexa paralela a $y = -2x$. Calcula a ecuación desta recta tanxente.
2. Consideremos o seguinte sistema de ecuacións lineares, que está formado por tres planos do espazo e depende do parámetro real m : **(2,5 puntos)**

$$\begin{cases} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{cases}$$

- 2.1. **[1 punto]** Discute o sistema para os diferentes valores do parámetro m .
 - 2.2. **[1 punto]** Interpreta xeometricamente este sistema para todos os valores do parámetro m e resólveo, se é posíbel, para o caso $m = 1$.
 - 2.3. **[0,5 puntos]** Para $m = 1$, é posíbel engadir unha cuarta ecuación de maneira que o sistema resultante sexa compatíbel determinado e teña como solución $(x, y, z) = (3, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$? Razoa a resposta.
3. O Concello de Canet de Mar conseguiu 24 entradas gratuítas para un concerto dun grupo de rock catalán, e decidiu sortealas entre os veciños interesados en asistir. Todos os veciños da vila seguidores deste grupo se apuntan ao sorteo, e só ao 16 % deles lles toca unha entrada. Do resto de seguidores do grupo, seis sétimas partes intentan comprar unha entrada a través da web, onde a probabilidade de conseguila é do 25 %. **(2,5 puntos)**
- 3.1. **[0,75 puntos]** Cantas persoas deste municipio teñen entrada para o concerto?
 - 3.2. **[0,75 puntos]** Se escollemos ao chou un veciño de Canet seguidor deste grupo de rock e non ten entrada para o concerto, cal é a probabilidade de que intentase conseguila vía web?
 - 3.3. **[1 punto]** O día do concerto, o equipo de son mide o nivel de decibelios xerado polos berros entusiastas do público ao longo dos 5 minutos que dura a canción máis famosa do grupo; pódese aproximar pola función seguinte:

$$S(t) = -t^3 + 12t^2 - 30t + 90, \quad t \in [0, 5],$$

- onde t é o tempo en minutos e $S(t)$, os decibelios. Cando se superan os 100 decibelios considérase que o público está moi entregado e actívanse automaticamente uns efectos luminosos especiais. Activáranse nalgún momento durante estes cinco minutos? Se a resposta é afirmativa, calcula en que minuto se activan, aproximado ás décimas.
4. Escolle UNHA das dúas opcións (A ou B) e responde ás cuestións que se formulan. Indica na portada do exame a opción escollida. **(2,5 puntos)**

OPCIÓN A

O alcalde dunha vila de Catalunya encárgalle ao arquitecto municipal o deseño dun parque infantil que se construíra nun terreo público. Para cumprir a normativa vixente, no parque ten que haber dous espazos ben delimitados: un para unha boca de rega —o cal, segundo o arquitecto, debe ter forma circular—, e outro para unha caseta onde gardar as ferramentas de mantemento —o cal debe ter forma cadrada—. Por motivos estéticos, o arquitecto quere delimitar cada un destes dous espazos cunha varanda de forxa. Sabendo que as dúas varandas miden exactamente 10 m de lonxitude en total, que medida debe ter a varanda de cada espazo para que a suma das superficies dos dous espazos sexa a máis pequena posíbel? Cal é esta superficie mínima?

OPCIÓN B

Considera os puntos do espazo $P = (1, 0, -1)$, $Q = (3, -2, 0)$ e $R = (1, 1, 1)$.

- 4.1. [0,75 puntos] Calcula a ecuación do plano que contén os puntos P , Q e R .
- 4.2. [0,75 puntos] Comproba que a área do triángulo $\triangle PQR$ é $\frac{3\sqrt{5}}{2} u^2$.
- 4.3. [1 punto] Determina as condicións que deben cumprir as coordenadas dun cuarto punto $S = (x, y, z)$ para que P , Q , R e S formen un tetraedro de volume 1. (O volume do tetraedro formado polos puntos P , Q , R e S é: $\text{volume}_{PQRS} = \frac{\text{área}(PQR) \cdot \text{altura}}{3}$.)

Comparación coa PAU de Galiza 2026

Os dous exames duran 90 minutos, permiten calculadora e valen 10 puntos, pero a estrutura é moi distinta. A PAU galega ten catro preguntas de peso desigual (estatística e probabilidade 2 puntos, obrigatoria; álgebra 2 puntos, con escolla entre dúas; análise 4 puntos, con escolla de 2 de 3 apartados; xeometría 2 puntos, con escolla entre dúas). O exame catalán ten catro exercicios de 2,5 puntos e só un ten optatividade (o 4, entre optimización e xeometría): o alumno non pode evitar a análise (función a anacos, continuidade, área e tanxente), a discusión dun sistema con parámetro e a súa interpretación xeométrica, nin un problema contextualizado de probabilidade que inclúe ademais un apartado de análise (o teorema de Bolzano e unha aproximación numérica). En contrapartida, a xeometría métrica só aparece como opción e non hai matrices nin determinantes como exercicio propio (só para discutir o sistema), nin distribucións binomial ou normal.

	Catalunya 2026	Galiza 2026
Duración	90 min	90 min
Exercicios	4 de 2,5 puntos	4 (2 + 2 + 4 + 2 puntos)
Optatividade	só no 4 (A/B)	2.1/2.2; 2 de 3 en 3; 4.1/4.2
Obrigatorio	análise, sistema, probabilidade	probabilidade (normal)
Tipo	enunciados longos e contextualizados	máis curtos; algún apartado conceptual
Nota media	4,18 (Catalunya)	—

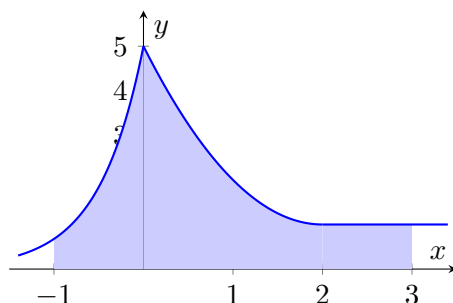
Tecnicamente, os exercicios son estándar (o alumno galego recoñecería todos os procedementos) e os cálculos son sinxelos. A dificultade vén de tres factores: a escasa optatividade, a carga de lectura e interpretación dos enunciados contextualizados (o exercicio 3 obriga a modelar a situación antes de aplicar a probabilidade total e Bayes, e a deducir o número de seguidores a partir das 24 entradas) e apartados pouco rutineiros como o 2.3 (decidir se se pode engadir unha cuarta ecuación) ou o 3.3 (un problema que non se resolve exactamente e require Bolzano e tanteo coa calculadora). Por iso se valora lixeiramente por riba da PAU galega, **6/10**: mesmo nivel de contidos e de técnica, pero máis razoamento de modelización e máis carga por minuto. A polémica (petición de revisión con preto de 1 400 sinaturas en 48 horas, preguntas no Parlament e a media máis baixa en polo menos

unha década) apunta máis á lonxitude e á redacción ca á dificultade matemática dos exercicios, como sinalou parte do profesorado.

Solucións

Exercicio 1. 1.1. Cada tramo é continuo no seu intervalo (exponencial, polinomio e constante), así que só hai que estudar $x = 0$ e $x = 2$. En $x = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0^-} 5e^{2x} = 5$ e $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ((x + m)^2 + 1) = m^2 + 1$; continuidade $\iff m^2 + 1 = 5 \iff m = \pm 2$. En $x = 2$: $f(2) = (2 + m)^2 + 1$ e $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$; continuidade $\iff (2 + m)^2 = 0 \iff m = -2$. As dúas condicións cúmprense á vez só para $\boxed{m = -2}$ (para $m = 2$ hai salto en $x = 2$: $17 \neq 1$).

1.2. Para $m = -2$: en $[-1, 0]$, $y = 5e^{2x}$ crece de $5e^{-2} \approx 0,68$ a 5; en $[0, 2]$, $y = (x - 2)^2 + 1$ é un arco de parábola que decrece de 5 ao vértice $(2, 1)$; en $[2, 3]$, $y = 1$. A gráfica é continua e sempre positiva.



Como $f > 0$ en $[-1, 3]$,

$$A = \int_{-1}^0 5e^{2x} dx + \int_0^2 ((x-2)^2 + 1) dx + \int_2^3 1 dx = \left[\frac{5}{2} e^{2x} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{(x-2)^3}{3} + x \right]_0^2 + 1 = \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{2e^2} \right) + \frac{14}{3} + 1,$$

$$\boxed{A = \frac{49}{6} - \frac{5}{2e^2} \approx 7,83 \text{ u}^2}.$$

1.3. A recta buscada ten pendente -2 . No primeiro tramo $f'(x) = 10e^{2x} > 0$ e no terceiro $f'(x) = 0$, así que o punto está no tramo parabólico: $f'(x) = 2(x - 2) = -2 \iff x = 1$, con $f(1) = 2$. Tanxente en $(1, 2)$: $y - 2 = -2(x - 1)$, é dicir, $\boxed{y = -2x + 4}$.

Exercicio 2. 2.1. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = m^2 - 4m + 3 = (m - 1)(m - 3).$

- $m \neq 1, 3$: $\text{rang } A = \text{rang } A^* = 3$: **compatíbel determinado**.
- $m = 3$: a 1.ª e a 2.ª ecuacións son $x + 3y + z = 4$ e $x + 3y + z = 5$, contraditorias; $\text{rang } A = 2 \neq \text{rang } A^* = 3$: **incompatíbel**.
- $m = 1$: a 1.ª e a 3.ª ecuacións coinciden ($x + y + z = 4$) e a 2.ª non é proporcional; $\text{rang } A = \text{rang } A^* = 2 < 3$: **compatíbel indeterminado** (un grao de liberdade).

2.2. Interpretación xeométrica:

- $m \neq 1, 3$: os tres planos córtanse nun único punto, $\left(\frac{-1}{m-3}, \frac{-1}{m-3}, \frac{5m-11}{m-3} \right)$.

- $m = 3$: os planos 1.º e 2.º son paralelos e distintos (mesmo vector normal $(1, 3, 1)$), e o 3.º, de normal $(3, 1, 1)$, córtalos a ambos en dúas rectas paralelas: non hai punto común.
- $m = 1$: o 1.º e o 3.º planos son coincidentes e o 2.º córtao nunha recta: os tres planos teñen unha recta común.

Para $m = 1$: restando $x + 3y + z = 5$ e $x + y + z = 4$ obtense $2y = 1$, $y = \frac{1}{2}$, e $x = \frac{7}{2} - z$. Con $z = \lambda$:

$$(x, y, z) = \left(\frac{7}{2} - \lambda, \frac{1}{2}, \lambda \right), \lambda \in \mathbb{R} \quad \left(\text{recta por } \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right) \text{ con vector director } (-1, 0, 1) \right).$$

2.3. **Si.** O punto $\left(3, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ pertence á recta solución ($\lambda = \frac{1}{2}$): $3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4$ e $3 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 5$. Basta engadir unha ecuación que verifique ese punto e que faga que a matriz de coeficientes teña

rango 3, por exemplo $x = 3$: $\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 = \text{rang } A^*$, logo o novo sistema é compatíbel

determinado e a súa única solución é $\left(3, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ (a recta corta o plano $x = 3$ só nese punto). Valería calquera plano que pase polo punto e non conteña a recta, p. ex. $z = \frac{1}{2}$.

Exercicio 3. Sexan E_S : “gañar entrada no sorteo”, W : “intentar comprala na web” e E : “ter entrada”. Para un seguidor ao chou: $P(E_S) = 0,16$; $P(W) = 0,84 \cdot \frac{6}{7} = 0,72$; $P(E \cap W) = 0,72 \cdot 0,25 = 0,18$; o $0,84 - 0,72 = 0,12$ restante non intenta comprala. Así, $P(E) = 0,16 + 0,18 = 0,34$.

3.1. As 24 entradas sorteadas son o 16 % dos seguidores: $N = 24/0,16 = 150$ seguidores. Teñen entrada $150 \cdot 0,34 = 51$ persoas (24 polo sorteo e 27 pola web).

3.2. $P(\overline{E}) = 0,66$ e $P(W \cap \overline{E}) = 0,72 \cdot 0,75 = 0,54$. Polo teorema de Bayes,

$$P(W \mid \overline{E}) = \frac{0,54}{0,66} = \frac{9}{11} \approx 0,818$$

(en número de persoas: 81 dos 99 seguidores sen entrada intentárono na web).

3.3. Sexa $D(t) = S(t) - 100 = -t^3 + 12t^2 - 30t - 10$, continua en $[0, 5]$. $D(0) = -10 < 0$ e $D(5) = 15 > 0$, logo, polo teorema de Bolzano, existe $t_0 \in (0, 5)$ con $S(t_0) = 100$: **si** se activan. Ademais $S'(t) = -3t^2 + 24t - 30 = 0 \iff t = 4 \pm \sqrt{6}$; en $[0, 5]$ só está $t = 4 - \sqrt{6} \approx 1,55$ (mínimo, $S \approx 68,6$), así que S decrece en $[0, 1,55]$ (desde $S(0) = 90 < 100$) e crece en $[1,55, 5]$: hai un único instante en que se superan os 100 dB. Tanteando: $S(4) = 98$, $S(4,1) = 99,799 < 100$, $S(4,2) = 101,592 > 100$. Os efectos actívanse en $t \approx 4,1$ minutos (a raíz é $t_0 \approx 4,111$).

Exercicio 4. Opción A. Sexa x a lonxitude (m) da varanda circular e $10 - x$ a da cadrada, $0 \leq x \leq 10$. O círculo ten raio $\frac{x}{2\pi}$ e área $\frac{x^2}{4\pi}$; o cadrado ten lado $\frac{10-x}{4}$ e área $\frac{(10-x)^2}{16}$:

$$A(x) = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(10-x)^2}{16}, \quad A'(x) = \frac{x}{2\pi} - \frac{10-x}{8} = 0 \iff x = \frac{10\pi}{4+\pi}.$$

$A''(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{8} > 0$: mínimo (absoluto, pois A é unha parábola convexa; nos extremos $A(0) = 6,25$ e $A(10) \approx 7,96$). Por tanto

$$\text{varanda circular } \frac{10\pi}{4+\pi} \approx 4,40 \text{ m}, \quad \text{varanda cadrada } \frac{40}{4+\pi} \approx 5,60 \text{ m}, \quad A_{\min} = \frac{25}{4+\pi} \approx 3,50 \text{ m}^2.$$

(O lado do cadrado, $\frac{10}{4+\pi} \approx 1,40$ m, coincide co diámetro do círculo.)

Opción B. 4.1. $\vec{PQ} = (2, -2, 1)$, $\vec{PR} = (0, 1, 2)$, $\vec{n} = \vec{PQ} \times \vec{PR} = (-5, -4, 2)$. O plano $5x + 4y - 2z + D = 0$ pasa por P : $5 + 2 + D = 0$, $D = -7$: $\pi: 5x + 4y - 2z - 7 = 0$.

4.2. Área $= \frac{1}{2} |\vec{PQ} \times \vec{PR}| = \frac{1}{2} \sqrt{25 + 16 + 4} = \frac{\sqrt{45}}{2} = \left[\frac{3\sqrt{5}}{2} \text{ u}^2 \right]$. (Tamén: $\vec{PQ} \cdot \vec{PR} = 0$, o triángulo é rectángulo en P con catetos $|\vec{PQ}| = 3$ e $|\vec{PR}| = \sqrt{5}$.)

4.3. A altura do tetraedro é a distancia de S ao plano π : $h = \frac{|5x + 4y - 2z - 7|}{\sqrt{45}}$. Entón

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{|5x + 4y - 2z - 7|}{3\sqrt{5}} = \frac{|5x + 4y - 2z - 7|}{6} = 1 \iff |5x + 4y - 2z - 7| = 6,$$

$$\boxed{5x + 4y - 2z - 13 = 0 \quad \text{ou} \quad 5x + 4y - 2z - 1 = 0}$$

é dicir, S debe estar nalgún dos dous planos paralelos a π situados a distancia $\frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ del (equivalentemente, $||[\vec{PQ}, \vec{PR}, \vec{PS}]|| = 6$).

11 Finlandia

PISA 2025, matemáticas: 469 puntos

Dificultade relativa estimada: 5/10 (posto 12 dos 25 exames analizados; PAU de Galiza = 5)

Exame: Exame de bacharelato (*ylioppilastutkinto*), proba de Matemáticas, nivel longo (avanzado)

Nome orixinal: *Matematiikka, pitkä oppimäärä* (finés) / *Matematik, lång lärokurs* (sueco); código M

Ano e convocatoria: 2026, convocatoria de primavera (*kevät 2026*), 18 de marzo de 2026

Duración: 6 horas **Calculadora:** exame dixital (sistema Abitti). Na parte A só se pode usar unha calculadora limitada do propio sistema; ao entregar a parte A ábreanse todos os programas do sistema (CAS, folla de cálculo, xeometría dinámica, Python...)

Estrutura e cualificación: 13 exercicios de 12 puntos; respóndense 10. Parte A: exercicios 1–6, responder a 5. Parte B1: exercicios 7–10, responder a 3. Parte B2: exercicios 11–13, responder a 2. Máximo: 120 puntos.

Contexto: O *ylioppilastutkinto* é o exame nacional de fin do bacharelato (*lukio*), organizado pola Comisión do Exame de Bacharelato (YTL). Desde 2020 as universidades admiten unha gran parte do alumnado só coas notas deste exame, nas que a matemática longa ten moito peso. Cada candidato escolle as materias; *pitkä matematiikka* é a opción para os estudos científicos e técnicos.

Fonte: https://tiedostot.ylioppilastutkinto.fi/kokeet/2026-03-18_M_fi/grading-instructions.html; https://storage.googleapis.com/mafynetti-production-public-files/Yo-mallivastaukset/2026K/pmyo_k26.pdf; <https://yle.fi/a/20-10009127>

Instrucións

O exame ten tres partes. **Parte A:** responde a cinco exercicios (1–6). **Parte B1:** responde a tres exercicios (7–10). **Parte B2:** responde a dous exercicios (11–13). Cada exercicio vale 12 puntos.

[Nota: Segundo o regulamento da YTL, durante a parte A só está dispoñíbel a calculadora limitada do sistema; unha vez entregada a parte A, non se pode volver a ela e ábreanse todos os programas. A tradución faise desde o finés.]

Parte A

Responde a cinco exercicios.

1. Números que faltan (12 p.)

Escribe nos campos de resposta deste exercicio só os resultados finais dos cálculos, sen pasos intermedios nin xustificacións. A resposta de cada apartado é un número enteiro. Completa os números que faltan nos apartados 1.1–1.6 de xeito que as afirmacións sexan verdadeiras.

$$1.1 \quad \frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{\square}{60} \quad (2 \text{ p.})$$

$$1.2 \quad \text{A media dos números } -5, 4, 13 \text{ e } \square \text{ é } 5. \quad (2 \text{ p.})$$

$$1.3 \quad (2x + 3)^2 = 4x^2 + \square x + 9 \quad (2 \text{ p.})$$

$$1.4 \quad \text{A solución da ecuación } 7x + \square = 19 - 2x \text{ é } x = 2. \quad (2 \text{ p.})$$

$$1.5 \quad \text{Os números } x = 3 \text{ e } y \text{ satisfán o sistema } \begin{cases} 2x + y = \square \\ x - 2y = 9. \end{cases} \quad (2 \text{ p.})$$

- 1.6 As lonxitudes dos catetos dun triángulo rectángulo son 20 e 21, polo que a lonxitude da hipotenusa é $\square$. (2 p.)

2. Derivadas e emparellamento (12 p.)

Determina as derivadas das funcións e estuda as súas propiedades. Escolle para cada función a mellor opción de cada unha das dúas listas.

- | | |
|---------------------------------------|-------------------------------|
| 2.1 $f(x) = -6x^2 + 12x + 5$ | (4 p.) |
| 2.1.1 (lista 1) | (2 p.) 2.1.2 (lista 2) (2 p.) |
| 2.2 $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$ | (4 p.) |
| 2.2.1 (lista 1) | (2 p.) 2.2.2 (lista 2) (2 p.) |
| 2.3 $h(x) = 3x^3 - 4x + 3$ | (4 p.) |
| 2.3.1 (lista 1) | (2 p.) 2.3.2 (lista 2) (2 p.) |

Lista 1 (apartados 2.1.1, 2.2.1, 2.3.1):

- (A) Os ceros da derivada son $x = -2$ e $x = 2$.
- (B) A gráfica da derivada corta o eixe y no punto $(0, 12)$.
- (C) Os ceros da derivada son $x = -\frac{2}{3}$ e $x = \frac{2}{3}$.
- (D) A gráfica da derivada corta o eixe x no punto $(4, 0)$.
- (E) O valor da derivada no punto $x = 1$ é 2.
- (F) Ningunha das anteriores.

Lista 2 (apartados 2.1.2, 2.2.2, 2.3.2):

- (A) A gráfica da derivada é unha recta de pendente -6 .
- (B) A gráfica da derivada é unha recta de pendente -1 .
- (C) A gráfica da derivada é unha parábola aberta cara arriba.
- (D) A gráfica da derivada é unha parábola aberta cara abaixo.
- (E) A derivada é un polinomio de terceiro grao.
- (F) Ningunha das anteriores.

[Nota: No exame dixital as opcións aparecen en menús despregábeis; as letras (A)–(F) engádense aquí para facilitar a lectura.]

3. Logaritmos (12 p.)

- 3.1 Dá un exemplo de números reais positivos a , b e c que non satisfagan a ecuación $\ln(a + b + c) = \ln a + \ln b + \ln c$. (4 p.)
- 3.2 Dá un exemplo de números reais positivos a , b e c que satisfagan a ecuación $\ln(a + b + c) = \ln a + \ln b + \ln c$. Os valores aproximados non abundan para xustificar a igualdade. (8 p.)

4. O método de Descartes (12 p.)

Material 4.A: texto “O método de Descartes”.

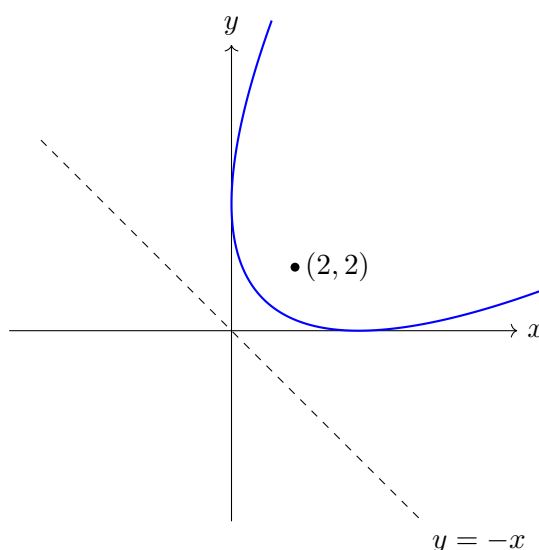
Resolve a ecuación $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ e mostra que o método de Descartes descrito no texto 4.A dá correctamente o número das súas solucións positivas.

[Nota: O material 4.A describe a regra dos signos de Descartes: escríbese o polinomio en orde decrecente de graos, considéranse os signos dos coeficientes non nulos e cóntanse os cambios de signo entre signos consecutivos; o número de raíces positivas é igual a ese número de cambios ou é menor ca el nun número par.]

5. Parábola (12 p.)

Material 5.A: figura “Parábola”.

Unha *parábola* é unha curva plana na que cada punto está á mesma distancia dunha recta dada e dun punto situado fóra dela. A directriz da parábola da figura 5.A é $y = -x$ e o seu foco é $(2, 2)$. Mostra que a ecuación da parábola se pode escribir na forma $x + y = a(x - y)^2 + b$ e determina as constantes a e b que aparecen nela.



6. A torre Eiffel

(12 p.)

Material 6.A: imaxe “Torre Eiffel”.

A forma da torre Eiffel pódese modelizar mediante un corpo do sistema de coordenadas xyz limitado polas catro superficies

$$x = a e^{c(h-z)}, \quad y = a e^{c(h-z)}, \quad x = -a e^{c(h-z)}, \quad y = -a e^{c(h-z)}$$

e polos planos $z = 0$ e $z = h$. No modelo $a = 4,255$, $c = 0,00892$, $h = 312$ e a unidade é o metro. Calcula o volume do corpo usando unha integral.

[Nota: O material 6.A é unha fotografía da torre Eiffel.]

Parte B1

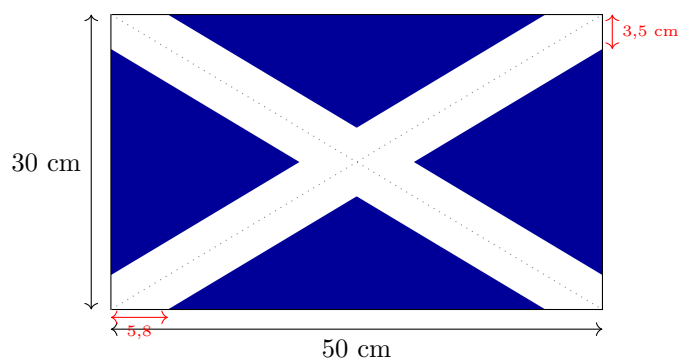
Responde a tres exercicios.

7. A bandeira de Escocia

(12 p.)

Material 7.A: imaxe “Bandeira de Escocia”.

Un afeccionado ao fútbol ten unha bandeira de Escocia de 50 cm de ancho e 30 cm de alto. Sobre o fondo azul da bandeira hai unha zona branca arredor das dúas diagonais. Esta zona esténdese en dirección horizontal 5,8 cm á esquerda e á dereita da diagonal e en dirección vertical 3,5 cm cara arriba e cara abaixo da diagonal, como na figura 7.A. Que porcentaxe da área da bandeira é a zona branca?



8. Un préstamo antigo (12 p.)

Os préstamos con xuros xa se usaban no antigo Oriente Próximo. Un texto asirio conservado describe un préstamo do seguinte xeito: “cada mes engadíase á débeda un siclo de prata por cada mina da débeda”. Unha mina vale aproximadamente 570 gramos de prata e divídese en 60 siclos. Non está totalmente claro como debe interpretarse o texto. Pódese interpretar polo menos das dúas maneiras seguintes:

Maneira 1: O xuro calcúlase só sobre as minas enteiras.

Maneira 2: O xuro calcúlase tamén sobre as fraccións de mina.

Canto xuro produce nun ano un préstamo de 30 minas segundo estas diferentes interpretacións?

9. Coeficiente de correlación (12 p.)

Dá un exemplo dun conxunto de datos bidimensional (de dúas variábeis) que teña polo menos dez puntos distintos e no que o coeficiente de correlación entre as variábeis sexa $r = 1$. Dá como resposta unha captura de pantalla dos datos, unha representación gráfica dos datos e capturas de pantalla que mostren que se cumpren as condicións pedidas. Dá tamén os exemplos correspondentes para os casos $r = -1$ e $r = 0$.

10. A sucesión de Collatz (12 p.)

A sucesión de Collatz é unha sucesión recursiva cuxos termos son números enteiros positivos:

- Se a_n é par, entón $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$.
- Se a_n é impar e maior ca 1, entón $a_{n+1} = 3a_n + 1$.
- Se $a_n = 1$, a sucesión remata.

10.1 Determina a sucesión de Collatz con valor inicial $a_1 = 23$. (3 p.)

10.2 Descubre coa axuda dun programa informático que valor inicial do intervalo 2–100 dá lugar á sucesión de Collatz máis longa. Podes escribir o teu código, por exemplo, en Python ou cunha folla de cálculo. Dá como resposta o teu código, unha explicación do código e unha táboa na que aparezan polo menos os valores iniciais que producen as cinco sucesións máis longas, así como as lonxitudes destas sucesións. (9 p.)

Parte B2

Responde a dous exercicios.

11. Fórmula de recorrencia dunha integral (12 p.)

Consideramos as integrais impropias $I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$, con $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

11.1 Deduce a fórmula de recorrencia $I_n = n I_{n-1}$ para $n \geq 1$.

Suxestión: Integra os dous membros da fórmula $D(x^n e^{-x}) = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x}$ no intervalo $0 \leq x \leq R$. (6 p.)

11.2 Mostra, usando a definición de integral impropia, que $I_0 = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$, e deduce o valor da integral I_5 coa axuda da fórmula de recorrencia $I_n = n I_{n-1}$. (6 p.)

12. A estrela de sete puntas (12 p.)

Na serie *Game of Thrones*, ambientada no mundo de fantasía creado por George R. R. Martin, aparece unha estrela de sete puntas (ver a imaxe adxunta), cuxa forma se modeliza neste exercicio. Os sete vértices da estrela sitúanse sobre unha circunferencia a intervalos iguais. As puntas da estrela están formadas por sete arcos de parábola, de xeito que cada punta está limitada por dúas parábolas. Cada parábola corta a circunferencia en dous vértices da estrela

entre os que queda un vértice da estrela. No punto de corte, a tanxente á circunferencia e a tanxente á parábola son perpendiculares. No centro da estrela hai unha circunferencia que é tanxente ás parábolas.

Determina a razón entre os raios da circunferencia do centro da estrela e da circunferencia que pasa polos vértices da estrela.

[Nota: Figura: estrela de sete puntas inscrita nunha circunferencia; cada lado curvo da estrela é un arco de parábola que une dous vértices non consecutivos (separados por un vértice) e corta a circunferencia exterior perpendicularmente; no centro, unha circunferencia pequena tanxente a todos os arcos.]

13. Puntos extremos

(12 p.)

Defínese a función $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mediante a fórmula

$$f(x) = \int_0^x \sin(2\pi z^2) dz.$$

En que puntos alcanza a función os seus valores máximo e mínimo?

Podes investigar a situación con programas informáticos, pero a resposta debe xustificarse con rigor. Non abundan como xustificación os valores aproximados das integrais calculados cun programa nin o uso das ordes fMax ou fMin.

[Nota: Existe tamén unha versión adaptada para alumnado con discapacidade visual (en que, por exemplo, o exercicio 12 é distinto), que non se recolle aquí.]

Solucións

Resólvense os trece exercicios (o alumno só debe responder a dez).

Parte A

Exercicio 1. 1.1 $\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{45-24}{60} = \frac{21}{60} = \frac{7}{20}$. 1.2 A suma debe ser $4 \cdot 5 = 20$: $20 - (-5 + 4 + 13) = 8$. 1.3 $(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$: 12.

1.4 Con $x = 2$: $14 + \square = 15$: 1. 1.5 $3 - 2y = 9 \Rightarrow y = -3$, e $2 \cdot 3 + (-3) = 3$. 1.6 $\sqrt{20^2 + 21^2} = \sqrt{841} = 29$.

Exercicio 2. 2.1 $f'(x) = -12x + 12$: $f'(0) = 12$, a gráfica de f' corta o eixe y en $(0, 12)$: **2.1.1: (B)**. f' é unha recta de pendente -12 , que non aparece: **2.1.2: (F)**.

2.2 $g'(x) = -x + 4$, que se anula en $x = 4$: corta o eixe x en $(4, 0)$: **2.2.1: (D)**. Recta de pendente -1 : **2.2.2: (B)**.

2.3 $h'(x) = 9x^2 - 4 = 0 \iff x = \pm \frac{2}{3}$: **2.3.1: (C)**. h' é unha parábola con coeficiente principal $9 > 0$, aberta cara arriba: **2.3.2: (C)**.

(Comprobación das demais opcións: $f'(1) = 0$, $g'(1) = 3$, $h'(1) = 5$, polo que ningunha ten (E); a opción (A) da lista 1 correspondería a $x^2 - 4$.)

Exercicio 3. A ecuación equivale (para $a, b, c > 0$) a $\ln(a + b + c) = \ln(abc) \iff a + b + c = abc$, porque $\ln$ é inxectiva.

3.1 $a = b = c = 1$: $\ln 3 \neq 0 = \ln 1 + \ln 1 + \ln 1$. Non a satisfán.

3.2 $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$: $a + b + c = 6 = abc$, e exactamente

$$\ln 1 + \ln 2 + \ln 3 = \ln(1 \cdot 2 \cdot 3) = \ln 6 = \ln(1 + 2 + 3).$$

(Outra posibilidade: $a = b = c = \sqrt{3}$, pois $3\sqrt{3} = (\sqrt{3})^3$.)

Exercicio 4. Co cambio $t = x^2$: $t^2 - 5t + 4 = 0 \iff t = 1$ ou $t = 4$, logo $x^2 = 1$ ou $x^2 = 4$, isto é, $x = \pm 1, \pm 2$; hai exactamente **dúas solucións positivas**, 1 e 2.

Regra de Descartes: os coeficientes non nulos de $x^4 - 5x^2 + 4$ en orde decrecente de graos son 1, -5, 4, de signos +, -, +. Hai dous cambios de signo, así que o número de raíces positivas é 2 ou $2 - 2 = 0$. O valor real, 2, é compatíbel coa regra (coincide co número de cambios de signo).

Exercicio 5. Un punto (x, y) está na parábola se e só se a súa distancia ao foco é igual á distancia á directriz $x + y = 0$:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} = \frac{|x+y|}{\sqrt{2}} \iff 2(x-2)^2 + 2(y-2)^2 = (x+y)^2.$$

Desenvolvendo: $2x^2 + 2y^2 - 8x - 8y + 16 = x^2 + 2xy + y^2 \iff x^2 - 2xy + y^2 = 8(x+y) - 16$, é dicir, $(x-y)^2 = 8(x+y) - 16$, de onde

$$x + y = \frac{1}{8}(x - y)^2 + 2, \quad a = \frac{1}{8}, \quad b = 2.$$

Exercicio 6. Para cada altura $z \in [0, h]$, a sección horizontal é o cadrado $|x| \leq ae^{c(h-z)}$, $|y| \leq ae^{c(h-z)}$, de lado $2ae^{c(h-z)}$ e área $A(z) = 4a^2e^{2c(h-z)}$. Polo principio de Cavalieri,

$$V = \int_0^h 4a^2e^{2c(h-z)} dz = 4a^2 \left[-\frac{e^{2c(h-z)}}{2c} \right]_0^h = \frac{2a^2}{c}(e^{2ch} - 1).$$

Con $a = 4,255$, $c = 0,00892$, $h = 312$: $2ch \approx 5,566$ e $V \approx \boxed{1,06 \cdot 10^6 \text{ m}^3} (\approx 1\,057\,000 \text{ m}^3)$.

Parte B1

Exercicio 7. Coordenadas con orixe na esquina inferior esquerda (cm). A franxa da diagonal ascendente está limitada polas rectas paralelas que pasan por (5,8;0) e (50;26,5), e por (0;3,5) e (44,2;30). Fóra dela quedan dous triángulos rectángulos de catetos 44,2 e 26,5, logo

$$A_{\text{franja}} = 50 \cdot 30 - 2 \cdot \frac{44,2 \cdot 26,5}{2} = 1500 - 1171,3 = 328,7 \text{ cm}^2.$$

A outra franxa é simétrica e ten a mesma área. As dúas franxas solápanse nun rombo centrado en (25,15). As rectas inferiores (pendente $m = \pm \frac{26,5}{44,2}$) córtanse en $x = 25$ á altura $m(25 - 5,8) \approx 11,51$ e as superiores a $25m + 3,5 \approx 18,49$; as rectas de cada franxa cortan a recta $y = 15$ en $x \approx 19,18$ e $x \approx 30,82$. Diagonais do rombo: $d_1 \approx 6,977$ e $d_2 \approx 11,638$, logo $A_{\text{rombo}} = \frac{d_1 d_2}{2} \approx 40,6 \text{ cm}^2$. Así,

$$A_{\text{branca}} = 2 \cdot 328,7 - 40,6 \approx 616,8 \text{ cm}^2, \quad \frac{616,8}{1500} \approx \boxed{41 \%}.$$

(Comprobado tamén por simulación de Monte Carlo.)

Exercicio 8. O xuro mensual é de 1 siclo por mina, é dicir, $\frac{1}{60}$ da débeda, e engádese á débeda (xuro composto mensual). Traballamos en siclos: 30 minas = 1800 siclos.

Maneira 1 (só minas enteiras): o xuro de cada mes é $\lfloor D/60 \rfloor$ siclos, onde D é a débeda en siclos:

mes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
xuro	30	30	31	31	32	32	33	33	34	34	35	35
débeda	1830	1860	1891	1922	1954	1986	2019	2052	2086	2120	2155	2190

Total: **390 siclos** = 6,5 minas $\approx$ 3,7 kg de prata.

Maneira 2 (tamén as fraccións): $D_{12} = 1800 \left(\frac{61}{60}\right)^{12}$, e o xuro é

$$1800 \left(\left(\frac{61}{60}\right)^{12} - 1 \right) \approx \boxed{394,9 \text{ siclos} \approx 6,58 \text{ minas} \approx 3,75 \text{ kg de prata}}.$$

(Se o xuro non se capitalizase, serían $12 \cdot 30 = 360$ siclos = 6 minas.)

Exercicio 9. Exemplos (comprobados con `CORREL/numpy.corrcoef`):

- $r = 1$: $(x_i, y_i) = (i, 2i + 1)$, $i = 1, \dots, 10$. Os puntos están nunha recta de pendente positiva, logo $r = 1$.
- $r = -1$: $(x_i, y_i) = (i, 20 - i)$, $i = 1, \dots, 10$: recta de pendente negativa, $r = -1$.
- $r = 0$: $x \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$, $y = x^2$. Como $\bar{x} = 0$ e $\sum x_i^3 = 0$, a covarianza $\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum x_i^3 - \bar{y} \sum x_i = 0$, e $r = 0$ (aínda que hai unha dependencia exacta non lineal).

A resposta do exame inclúe as capturas da folla de cálculo, os diagramas de dispersión e o valor de r calculado.

Exercicio 10. 10.1 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1 (16 termos).

10.2 Programa en Python (lonxitude = número de termos, incluídos o inicial e o 1):

```
def lonx(a):
    n = 1
    while a != 1:
        a = a // 2 if a % 2 == 0 else 3*a + 1
        n += 1
    return n

taboa = sorted(((lonx(a), a) for a in range(2, 101)), reverse=True)
for L, a in taboa[:6]:
    print(a, L)
```

A función aplica a regra ata chegar a 1 contando os termos; despois calcúlase a lonxitude para cada valor inicial de 2 a 100 e ordénase de maior a menor.

valor inicial	97	73	54	55	27	(82, 83)
lonxitude	119	116	113	113	112	111

O valor inicial que dá a sucesión máis longa é $a_1 = 97$ (119 termos, 118 pasos).

Parte B2

Exercicio 11. 11.1 Sexa $n \geq 1$. Integrando a fórmula dada en $[0, R]$:

$$\left[x^n e^{-x} \right]_0^R = R^n e^{-R} = n \int_0^R x^{n-1} e^{-x} dx - \int_0^R x^n e^{-x} dx.$$

Como $\lim_{R \rightarrow \infty} R^n e^{-R} = 0$ (a exponencial domina calquera potencia), se I_{n-1} converge, o membro dereito tamén ten límite e

$$\int_0^R x^n e^{-x} dx = n \int_0^R x^{n-1} e^{-x} dx - R^n e^{-R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} n I_{n-1}.$$

Así I_n converge e $\boxed{I_n = n I_{n-1}}$ (por indución, todas as I_n converxen, unha vez visto 11.2 que I_0 converge).

11.2 $I_0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} (1 - e^{-R}) = 1$. Entón $I_1 = 1$, $I_2 = 2$, $I_3 = 6$, $I_4 = 24$ e $\boxed{I_5 = 5 \cdot 24 = 120}$ (en xeral $I_n = n!$).

Exercicio 12. Sexa R o raio da circunferencia exterior, centrada na orixe, e $\theta = \frac{2\pi}{7}$ o ángulo central entre vértices consecutivos. Consideramos a parábola que pasa polos vértices V_{-1} e V_1 , simétricos respecto do eixe y , entre os que está o vértice $V_0 = (0, R)$:

$$V_{\pm 1} = (\pm R \sin \theta, R \cos \theta).$$

Por simetría, o eixe da parábola é o eixe y : $y = p + qx^2$. Que a parábola corte a circunferencia perpendicularmente significa que en V_1 a súa tanxente é a recta radial OV_1 , de pendente $\frac{\cos \theta}{\sin \theta}$. Logo

$$2qR \sin \theta = \cot \theta \Rightarrow q = \frac{\cos \theta}{2R \sin^2 \theta}, \quad p = R \cos \theta - qR^2 \sin^2 \theta = \frac{R \cos \theta}{2} > 0.$$

A distancia da orixe a un punto da parábola cumpre $x^2 + (p + qx^2)^2 \geq p^2$, con igualdade só en $x = 0$ (porque $p, q > 0$), así que a circunferencia central de raio r tanxente á parábola (e, por simetría, ás sete) ten $r = p$. A razón pedida é

$$\boxed{\frac{r}{R} = \frac{\cos(2\pi/7)}{2} \approx 0,312}.$$

Exercicio 13. f é derivábel (teorema fundamental do cálculo) e $f'(x) = \sin(2\pi x^2)$. En $[0, 1]$, $2\pi x^2 \in [0, 2\pi]$, logo $f'(x) = 0 \iff x \in \{0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\}$, $f' > 0$ en $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $f' < 0$ en $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$. Polo

tanto f crece e despois decrece: o **máximo** alcánzase en $\boxed{x = \frac{1}{\sqrt{2}}}$ ($f \approx 0,357$), e o mínimo nun extremo, $x = 0$ ou $x = 1$.

$f(0) = 0$. Para $f(1)$, co cambio $u = z^2$ e despois $u = t + \frac{1}{2}$ na segunda metade (onde $\sin(2\pi u) = -\sin 2\pi t$):

$$f(1) = \int_0^1 \frac{\sin(2\pi u)}{2\sqrt{u}} du = \int_0^{1/2} \sin(2\pi t) \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{2\sqrt{t+1/2}} \right) dt > 0,$$

porque en $(0, \frac{1}{2})$ é $\sin(2\pi t) > 0$ e $\frac{1}{\sqrt{t}} > \frac{1}{\sqrt{t+1/2}}$ (integral impropia converxente en $t = 0$). Logo $f(1) > 0 = f(0)$ ($f(1) \approx 0,172$) e o **mínimo** alcánzase en $\boxed{x = 0}$, co valor 0.

12 Italia

PISA 2025, matemáticas: 468 puntos

Dificultade relativa estimada: 5/10 (posto 12 dos 25 exames analizados; PAU de Galiza = 5)

Exame: Esame di Stato conclusivo del secondo ciclo di istruzione — segunda proba escrita, Matemática (Liceo Scientifico, código LI02 e outros)

Nome orixinal: *Esame di Stato, Seconda prova scritta — Disciplina: Matematica* (popularmente, *Maturità*)

Ano e convocatoria: 2025, sesión ordinaria (19 de xuño de 2025)

Duración: máximo 6 horas **Calculadora:** científica ou gráfica, sen cálculo simbólico nin conexión a Internet

Estrutura e cualificación: o alumnado resolve *un* dos dous problemas (cada un con catro apartados) e responde a *catro* dos oito *quesiti* (cuestións). O texto non indica puntuacións por apartado: a proba cualifícase sobre 20 puntos mediante a grella de avaliación ministerial (*griglia di valutazione*).

Contexto: A segunda proba escrita do exame de Estado do Liceo Scientifico é común en toda Italia e redáctaa o Ministerio. A nota final do exame (sobre 100) dá o título de *diploma*, requisito para entrar na universidade; o acceso a moitos graos depende ademais de probas propias (p. ex. TOLC ou probas de *numero programmato*), polo que o exame non funciona como unha selectividade en sentido estrito.

Fonte: https://www.matematika.it/public/esami_di_stato/2025_ordinamento.pdf; <https://online.scuola.zanichelli.it/provamatematica-files/prove-maturita/pdf2025/P2.pdf>

Instrucións

Sesión ordinaria 2025. Segunda proba escrita. Ministerio da Educación e do Mérito. A002 — Exame de Estado de conclusión do segundo ciclo de ensino.

Texto válido para todos os seguintes itinerarios: LI02, LI03, LI15, LI1S, LI22, LI23, LI31, LI32, LIA2, LIAO, LIB2, LIC2, LID2, LIH2, LII3, LII4, LIIS, LIS2, EA02, EA10.

Disciplina: MATEMÁTICA.

O candidato debe resolver un dos dous problemas e responder a 4 cuestións do cuestionario.

Problema 1

«A razón non é nada sen a imaxinación» — Descartes

Dados $r > 0$ e $k < 0$, considéranse a circunferencia C_r , de centro a orixe e raio r , e a función $f_k(x) = k|x|$.

- Verifica que f_k é continua pero non derivábel en $x = 0$, calquera que sexa o valor de k . Determina os dous valores de r para os que C_r delimita coa gráfica de f_k , para valores axeitados de k , un sector circular no semiplano $y \leq 0$ de área π e contorno de lonxitude $4 + \pi$. Estabelecido que $r = 2$ é o maior destes valores, nun mesmo sistema de referencia cartesiano Oxy , debuxa a circunferencia C_2 e a gráfica da función f_{-1} .
- Estuda a función $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$, especificando o seu dominio, simetrías, puntos de non derivabilidade, intervalos de monotonía e conxunto imaxe. Verifica que a gráfica de g coincide coa parte de C_2 que se atopa no semiplano $y \geq 0$. Explica por que g non é invertíbel no seu

- dominio e explicita o intervalo $[a; b]$ de amplitude máxima, con $b > 0$, no que g admite unha función inversa h . Cal é a expresión analítica de h ?
- c) Sexa A un punto da gráfica de g situado no primeiro cuadrante, e sexan M e R as súas proxeccións ortogonais sobre os eixes de coordenadas. Determina as coordenadas de A de modo que o cuadrilátero $AMOR$ teña área máxima. Despois de verificar que este cuadrilátero é un cadrado, demostra que tamén é o de perímetro máximo.
- d) Considérase a función $F(x) = \int_{-2}^x \sqrt{4-t^2} dt$, con $x \in [-2; 2]$. Determina $F(2)$ e debuxa unha gráfica de F , despois de estudar a súa monotonía e concavidade. Escribe, ademais, a ecuación da recta tanxente á gráfica de F no seu punto de inflexión.

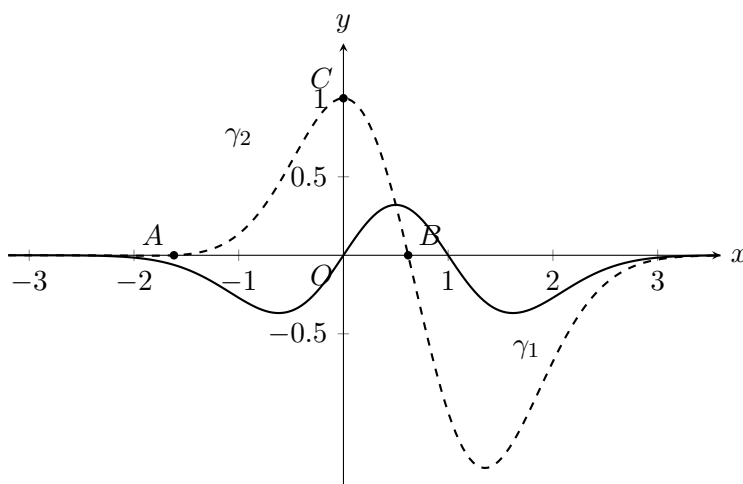
Problema 2

«A beleza é mesturar, nas xustas proporcións, o finito e o infinito» — atribuída a Platón

As gráficas γ_1 e γ_2 representan, respectivamente, as funcións f e g , definidas en $\mathbb{R}$, cuxas expresións analíticas son

$$f(x) = p(x) \cdot e^{p(x)}, \quad g(x) = q(x) \cdot e^{p(x)},$$

con $p(x)$ e $q(x)$ polinomios de segundo grao.



[Nota: Na figura, γ_1 (línea continua) pasa por $(0;0)$ e $(1;0)$; γ_2 (línea discontinua) ten en $C(0;1)$ un punto estacionario; A e B son as interseccións de γ_2 co eixe x , e ambas as gráficas teñen o eixe x como asíntota horizontal.]

- a) Determina os polinomios $p(x)$ e $q(x)$ utilizando a información que se pode deducir das gráficas da figura, tendo en conta que $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é a abscisa dun punto estacionario de f e que $-\varphi$, abscisa do punto A , é un cero de g .
- b) Supoñendo que $p(x) = x - x^2$, estuda a función f especificando a ecuación da asíntota e as abscisas dos puntos estacionarios e de inflexión. Verifica que a recta de ecuación $x = \frac{1}{2}$ é eixe de simetría de γ_1 . Determina o conxunto imaxe de f e indica, en función do parámetro real k , o número de solucións da ecuación $f(x) = k$.
- c) Estabelecido ademais que $q(x) = 1 - x - x^2$, verifica que $\frac{1}{\varphi}$ é o outro cero de g e que o triángulo ABC é rectángulo. Demostra que γ_1 e γ_2 teñen un único punto de intersección, do

que se piden as coordenadas. Considerados sobre γ_1 e γ_2 , respectivamente, os puntos P_1 e P_2 que teñen a mesma abscisa $x \geq \frac{1}{2}$, calcula a lonxitude máxima que pode ter o segmento P_1P_2 .

- d) Calcula a área da rexión limitada R comprendida entre γ_1 , γ_2 e o eixe de ordenadas. Determina, a seguir, o valor de $t \geq \frac{1}{2}$ para o que a recta $x = t$ delimita coas dúas gráficas unha rexión R' equivalente (da mesma área) a R .

Cuestionario (*quesiti*)

1. Dado un triángulo ABC , sexa M o punto medio do lado BC e sexan B' e C' dous puntos, respectivamente, sobre o lado AB e sobre o lado AC , de tal modo que $AB' = \frac{1}{3}AB$ e $AC' = \frac{1}{3}AC$. Demostra que, se os segmentos MB' e MC' son congruentes entre si, entón tamén o son os lados AB e AC .
2. Considéranse a superficie esférica de ecuación $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 1$ e o plano π de ecuación $x - 2y - 2z + d = 0$. Discute, segundo os valores do parámetro real d , se o plano π é secante, tanxente ou exterior á superficie esférica. Determina o valor do parámetro d de modo que π divida a esfera en dúas partes iguais.
3. A obra futurista de Boccioni *Formas únicas da continuidade no espazo* (*Forme uniche della continuità nello spazio*), de 1913, reproducida na moeda de 20 céntimos, describe un home que avanza rapidamente no espazo. Unha parte do perfil destacado na figura, nun sistema de referencia axeitado, pódese aproximar pola función

$$f(x) = \begin{cases} -4x^2 - 8x, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 + \operatorname{tg}\left(x + \frac{3}{4}\pi\right), & 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

Debuxa a gráfica de f , despois de analizar a súa continuidade e derivabilidade no intervalo $[-1; 2]$.

[Nota: Figura: fotografía da cara nacional italiana da moeda de 20 céntimos de euro, que reproduce a escultura de Boccioni, cun tramo do seu perfil destacado. Non se reproduce; non contén datos numéricos necesarios para a resolución.]

4. Dada unha función g , derivábel en $\mathbb{R}$ e tal que $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$, determina a ecuación da recta normal á curva $y = g(x) \operatorname{sen} 2x$ no seu punto de abscisa $\frac{\pi}{4}$.
5. Determina o valor do parámetro real k de modo que as dúas curvas $y = e^x$, $y = 6 - ke^{-x}$ sexan tanxentes entre si, e calcula as coordenadas do punto de contacto.
6. Escribe unha función polinómica f de tal modo que a recta de ecuación $y = 2x + 3$ sexa tanxente á gráfica de f no seu punto de abscisa 0 e se cumpra $\int_0^3 f(x) dx = 9$.
7. *Como me parecía que por pura casualidade algúns feitos ocorreran tal e como foran predichos polos adiviños, ti falaches longamente do azar, e díxeches, por exemplo, que se pode obter o «golpe de Venus» lanzando ao chou catro dados [...].*

Cicerón, *De divinatione*, II, 21, 48 — tradución e edición (ao italiano) de S. Timpanaro, Garzanti, Milán 1999.

Texto orixinal: *Nam cum mihi quaedam casu viderentur sic evenire ut praedicta essent a divinantibus, dixisti multa de casu, ut Venerium iaci posse casu quattuor talis iactis [...].*

Cicerón, no diálogo co seu irmán Quinto, fala do golpe de Venus, que consiste en lanzar 4 dados de 4 caras obtendo 4 resultados diferentes. Supoñendo que as caras de cada dado son equiprobábeis, determina:

- a probabilidade de obter o golpe de Venus no lanzamento de 4 dados;
- a probabilidade de obter 4 números todos iguais.

8. Cantos anagramas, aínda que non teñan significado, ten a palabra «STUDIARE»? En cantos deses anagramas se pode ler consecutivamente a palabra «ARTE», como por exemplo en «SUARTEDI»?

Cantos anagramas, aínda que non teñan significado, ten a palabra «VACANZA»?

[Nota: Mantéñense as palabras italianas orixinais (studiare = estudar, arte = arte, vacanza = vacacións), xa que o reconto depende das súas letras.]

*«A matemática non coñece razas nin fronteiras xeográficas;
para a matemática, o mundo cultural é unha única nación» — D. Hilbert*

Duración máxima da proba: 6 horas.

Permítese o uso de calculadoras científicas ou gráficas sempre que non estean dotadas da capacidade de cálculo simbólico alxébrico e non dispoñan de conexión a Internet.

Permítese o uso do dicionario bilingüe (italiano–lingua do país de procedencia) para os candidatos de lingua materna non italiana.

Non se permite abandonar o centro antes de que transcorran 3 horas desde a entrega do enunciado.

Solucións

Problema 1. a) $f_k(x) = k|x|$ é continua en $\mathbb{R}$ por ser produto dunha constante pola función valor absoluto, que é continua. En $x = 0$ as derivadas laterais son

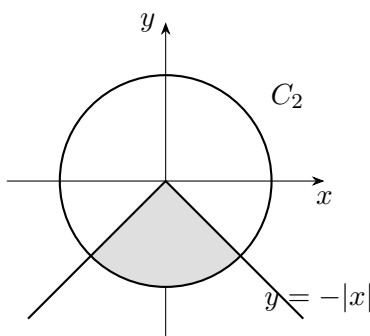
$$f'_k(0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{k|h|}{h} = -k, \quad f'_k(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{k|h|}{h} = k,$$

distintas porque $k \neq 0$: f_k non é derivábel en 0 (punto angular).

As dúas semirrectas $y = k|x|$ ($k < 0$) delimitan con C_r , en $y \leq 0$, un sector circular de ángulo θ e raio r , con área $\frac{1}{2}\theta r^2$ e contorno $2r + \theta r$. Das condicións $\theta r = 4 + \pi - 2r$ e $\frac{1}{2}r(\theta r) = \pi$:

$$r(4 + \pi - 2r) = 2\pi \iff 2r^2 - (4 + \pi)r + 2\pi = 0 \iff r = \frac{(4 + \pi) \pm (4 - \pi)}{4} \iff \boxed{r = 2 \text{ ou } r = \frac{\pi}{2}}.$$

Para $r = 2$: $\theta = \frac{2\pi}{r^2} = \frac{\pi}{2}$, cada semirrecta forma $\frac{\pi}{4}$ co semieixe $y < 0$ e $k = -1$. Para $r = \frac{\pi}{2}$: $\theta = \frac{8}{\pi} \approx 2,546 < \pi$, admisíbel, con $k = -\cot \frac{\theta}{2} \approx -0,307$.



b) $g(x) = \sqrt{4-x^2}$. Dominio: $4-x^2 \geq 0 \iff [-2; 2]$. É par ($g(-x) = g(x)$): gráfica simétrica respecto do eixe y . $g'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$ en $] -2; 2[$; en $x = \pm 2$, $\lim g' = \mp \infty$: non é derivábel en $x = \pm 2$ (tanxentes verticais). $g' > 0$ en $] -2; 0[$, $g' < 0$ en $] 0; 2[$: crecente en $[-2; 0]$, decrecente en $[0; 2]$, máximo absoluto $g(0) = 2$, mínimos $g(\pm 2) = 0$. Imaxe: $[0; 2]$.

$y = \sqrt{4-x^2} \iff (x^2 + y^2 = 4 \text{ e } y \geq 0)$: a gráfica é a semicircunferencia superior de C_2 .

g non é inxectiva ($g(-1) = g(1) = \sqrt{3}$), logo non é invertíbel no seu dominio. É estritamente monótona en $[-2; 0]$ e en $[0; 2]$ e en ningún intervalo que conteña 0 no seu interior; co requisito $b > 0$, o intervalo de amplitude máxima é $[a; b] = [0; 2]$. Despexando $y = \sqrt{4-x^2}$, $x \in [0; 2]$: $x = \sqrt{4-y^2}$, polo que

$$h(x) = \sqrt{4-x^2}, \quad x \in [0; 2]$$

(a restrición de g a $[0; 2]$ coincide coa súa inversa: a gráfica, un cuarto de circunferencia, é simétrica respecto de $y = x$).

c) $A = (x, \sqrt{4-x^2})$, $0 < x < 2$; $AMOR$ é un rectángulo de lados x e $\sqrt{4-x^2}$. Área $S(x) = x\sqrt{4-x^2}$; basta maximizar $S^2 = x^2(4-x^2) = 4 - (x^2-2)^2$, máxima para $x^2 = 2$:

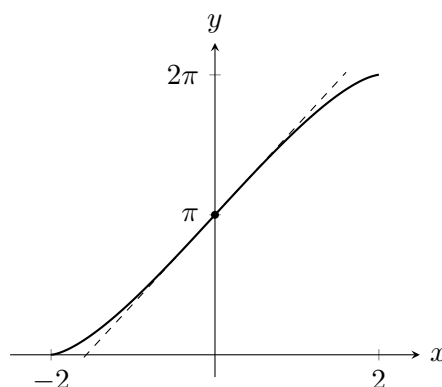
$$A = (\sqrt{2}, \sqrt{2}), \quad S_{\max} = 2.$$

Os lados son iguais ($\sqrt{2}$): é un cadrado. Perímetro $P(x) = 2(x + \sqrt{4-x^2})$, $P'(x) = 2(1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}})$, que é positiva para $x < \sqrt{2}$ e negativa para $x > \sqrt{2}$: o máximo do perímetro alcánzase tamén en $x = \sqrt{2}$, con $P_{\max} = 4\sqrt{2}$. (Alternativamente: $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2) = 8$, con igualdade se e só se $x = y$.)

d) $F(2) = \int_{-2}^2 \sqrt{4-t^2} dt$ é a área do semicírculo de raio 2: $F(2) = 2\pi$. Polo teorema fundamental do cálculo, $F'(x) = g(x) \geq 0$ (nula só en ± 2): F é crecente en $[-2; 2]$, de $F(-2) = 0$ a $F(2) = 2\pi$. $F''(x) = g'(x)$: F é convexa en $[-2; 0]$ e cóncava en $[0; 2]$, con punto de inflexión en $x = 0$, $F(0) = \pi$ (metade da área). En $x = \pm 2$ a tanxente é horizontal ($F'(\pm 2) = 0$). Como $F'(0) = 2$, a tanxente no punto de inflexión é

$$y = 2x + \pi.$$

(Explicitamente, $F(x) = \frac{\pi}{2}\sqrt{4-x^2} + 2 \arcsin \frac{x}{2} + \pi$; non é necesario.)



Problema 2. a) Como $e^{p(x)} > 0$, os zeros de f son os de p . Da figura, γ_1 pasa por $(0; 0)$ e $(1; 0)$, logo $p(x) = a(x^2 - x)$, $a \neq 0$. Ademais $f'(x) = p'(x)e^{p(x)}(1 + p(x))$; como $p'(\varphi) \neq 0$ ($\varphi \neq \frac{1}{2}$), debe ser $p(\varphi) = -1$. Sendo $\varphi^2 - \varphi = 1$, resulta $a = -1$:

$$p(x) = x - x^2$$

(coherente coa asíntota $y = 0$, pois $p \rightarrow -\infty$). Para $q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$: $g(0) = 1$ ($C(0; 1) \in \gamma_2$) dá $\gamma = 1$; $g'(x) = e^p(q' + qp')$ e C estacionario dá $q'(0) + q(0)p'(0) = \beta + 1 = 0$, $\beta = -1$; $q(-\varphi) = 0$ dá $\alpha\varphi^2 + \varphi + 1 = 0$, e como $\varphi^2 = \varphi + 1$, $\alpha = -1$:

$$q(x) = 1 - x - x^2.$$

b) $f(x) = (x - x^2)e^{x-x^2}$, $D = \mathbb{R}$. Como $p(x) \rightarrow -\infty$ cando $x \rightarrow \pm\infty$ e $\lim_{u \rightarrow -\infty} ue^u = 0$, a asíntota (horizontal, por ambos os lados) é $y = 0$. Ceros: $x = 0$, $x = 1$; $f > 0$ en $]0; 1[$.

$$f'(x) = (1 - 2x)(1 + x - x^2)e^{x-x^2} = (2x - 1)(x^2 - x - 1)e^{x-x^2}.$$

Puntos estacionarios: $x = \frac{1}{2}$ e $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, é dicir, $x = \varphi$ e $x = 1 - \varphi = -\frac{1}{\varphi}$. Signo: f decrece en $] -\infty; 1 - \varphi]$, crece en $[1 - \varphi; \frac{1}{2}]$, decrece en $[\frac{1}{2}; \varphi]$, crece en $[\varphi; +\infty[$. Mínimos absolutos $f(1 - \varphi) = f(\varphi) = -\frac{1}{e}$ (pois $p = -1$); máximo relativo $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}e^{1/4}$.

$$f''(x) = -x(x - 1)(4x^2 - 4x - 9)e^{x-x^2},$$

que cambia de signo en $x = 0$, $x = 1$, $x = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{2}$: inflexións en $x = 0, 1, \frac{1 - \sqrt{10}}{2}, \frac{1 + \sqrt{10}}{2}$.

Simetría: $p(1 - x) = (1 - x) - (1 - x)^2 = x - x^2 = p(x)$, logo $f(1 - x) = f(x)$ e $x = \frac{1}{2}$ é eixe de simetría de γ_1 .

Imaxe: $\left[-\frac{1}{e}; \frac{e^{1/4}}{4} \right]$ (o máximo relativo é absoluto porque $f \rightarrow 0$ no infinito). Número de solucións de $f(x) = k$:

k	$k < -\frac{1}{e}$	$-\frac{1}{e}$	$] -\frac{1}{e}; 0[$	0	$]0; \frac{e^{1/4}}{4}[$	$\frac{e^{1/4}}{4}$	$k > \frac{e^{1/4}}{4}$
n.º sol.	0	2	4	2	2	1	0

c) $q(x) = 0 \iff x^2 + x - 1 = 0 \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Unha raíz é $-\varphi$ e a outra $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{1}{\varphi}$. Con $A(-\varphi; 0)$, $B(\frac{1}{\varphi}; 0)$, $C(0; 1)$: $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (-\varphi) \cdot \frac{1}{\varphi} + (-1)(-1) = 0$: o triángulo é rectángulo en C .

$f(x) = g(x) \iff p(x) = q(x)$ (pois $e^p > 0$) $\iff x - x^2 = 1 - x - x^2 \iff x = \frac{1}{2}$: punto de

intersección único $\left(\frac{1}{2}; \frac{e^{1/4}}{4} \right)$.

$\overline{P_1 P_2} = |f(x) - g(x)| = |p - q| e^p = (2x - 1)e^{x-x^2} =: d(x)$ para $x \geq \frac{1}{2}$. $d'(x) = e^{x-x^2} [2 - (2x - 1)^2] = 0 \iff x = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$; d crece antes e decrece despois (e $d \rightarrow 0$ no infinito). Nese punto $p = x(1 - x) = -\frac{1}{4}$:

$$\overline{P_1 P_{2\max}} = \sqrt{2} e^{-1/4} \approx 1,10.$$

d) En $[0; \frac{1}{2}]$, $g - f = (q - p)e^p = (1 - 2x)e^{x-x^2} \geq 0$, e $(1 - 2x)e^{x-x^2} = \frac{d}{dx}e^{x-x^2}$:

$$\text{Área}(R) = \int_0^{1/2} (1 - 2x)e^{x-x^2} dx = \left[e^{x-x^2} \right]_0^{1/2} = \left[e^{1/4} - 1 \right] \approx 0,284.$$

Para $t \geq \frac{1}{2}$: $\text{Área}(R') = \int_{1/2}^t (2x - 1)e^{x-x^2} dx = e^{1/4} - e^{t-t^2}$. Igualando, $e^{t-t^2} = 1 \iff t(1 - t) = 0$, e con $t \geq \frac{1}{2}$: $t = 1$.

Pregunta 1. Tomemos A como orixe e $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$. Entón $M = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$, $B' = \frac{\vec{b}}{3}$, $C' = \frac{\vec{c}}{3}$, e

$$\overrightarrow{MB'} = -\left(\frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right), \quad \overrightarrow{MC'} = -\left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}\right).$$

$$|MB'|^2 - |MC'|^2 = \left(\frac{1}{36}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{6}\vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{1}{4}|\vec{c}|^2\right) - \left(\frac{1}{4}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{6}\vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{1}{36}|\vec{c}|^2\right) = \frac{2}{9}(|\vec{c}|^2 - |\vec{b}|^2).$$

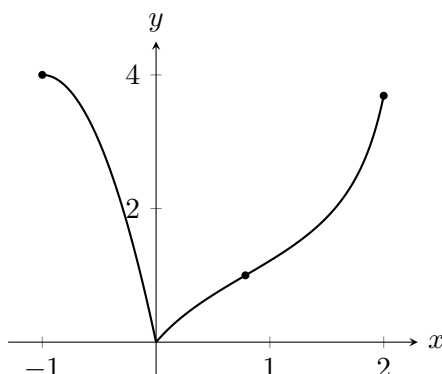
Logo $MB' = MC' \implies |\vec{b}| = |\vec{c}|$, é dicir, $AB = AC$. ■ (Tamén vale co teorema da mediana / de Stewart nos triángulos MBB' e MCC' .)

Pregunta 2. Centro $O'(1; 2; 0)$, raio 1. Distancia ao plano: $\delta = \frac{|1 - 4 - 0 + d|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{|d - 3|}{3}$.

- secante se $\delta < 1 \iff 0 < d < 6$;
- tanxente se $\delta = 1 \iff d = 0$ ou $d = 6$;
- exterior se $\delta > 1 \iff d < 0$ ou $d > 6$.

Divide a esfera en dúas partes iguais se pasa polo centro: $\boxed{d = 3}$.

Pregunta 3. En $[-1; 0]$, f é polinómica; en $]0; 2]$, $\text{tg}(x + \frac{3}{4}\pi)$ está definida se $x + \frac{3}{4}\pi \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, isto é, $x \neq -\frac{\pi}{4} + n\pi$; o primeiro valor positivo é $\frac{3\pi}{4} \approx 2,36 > 2$, logo f é continua e derivábel en $]0; 2]$. En $x = 0$: $f(0) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 + \text{tg} \frac{3\pi}{4} = 0$: *continua*. $f'(x) = -8x - 8$ en $] -1; 0[$ e $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x + \frac{3}{4}\pi)}$ en $]0; 2]$; $f'(0^-) = -8$, $f'(0^+) = \frac{1}{(-\sqrt{2}/2)^2} = 2$: $\boxed{x = 0 \text{ é punto anguloso}}$; f é derivábel en $[-1; 2] \setminus \{0\}$. Na parábola: $f(-1) = 4$, vértice en $x = -1$ ($f'(-1) = 0$), decrecente e cóncava en $[-1; 0]$. No outro tramo: crecente ($f' > 0$), $f''(x) = \frac{2 \text{tg}(x + \frac{3}{4}\pi)}{\cos^2(x + \frac{3}{4}\pi)}$, cóncava en $]0; \frac{\pi}{4}[$ e convexa en $]\frac{\pi}{4}; 2]$, con inflexión en $(\frac{\pi}{4}; 1)$; $f(2) = 1 + \text{tg}(2 + \frac{3}{4}\pi) \approx 3,69$.



Pregunta 4. $y(x) = g(x) \sin 2x$, $y'(x) = g'(x) \sin 2x + 2g(x) \cos 2x$. En $x = \frac{\pi}{4}$: $y = 2 \cdot 1 = 2$, $y' = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 0 = 2$. A normal ten pendente $-\frac{1}{2}$:

$$\boxed{y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{8} + 2}.$$

Pregunta 5. Tanxencia en x_0 : $e^{x_0} = 6 - ke^{-x_0}$ e $e^{x_0} = ke^{-x_0}$ (igualdade de derivadas). Restando, $e^{x_0} = 6 - e^{x_0}$, logo $e^{x_0} = 3$, $x_0 = \ln 3$ e $k = e^{2x_0} = 9$.

$$\boxed{k = 9, \quad \text{punto de contacto } (\ln 3; 3)}.$$

(Equivalentemente, $u = e^x$: $u^2 - 6u + k = 0$ debe ter raíz dobre, $\Delta = 36 - 4k = 0$.)

Pregunta 6. Tómasse $f(x) = ax^2 + 2x + 3$, que cumpre $f(0) = 3$, $f'(0) = 2$ para todo a . Entón $\int_0^3 f(x) dx = 9a + 9 + 9 = 9 \iff a = -1$:

$$\boxed{f(x) = -x^2 + 2x + 3}$$

(unha das infinitas solucións posíbeis).

Pregunta 7. Casos posíbeis: $4^4 = 256$, equiprobábeis. Golpe de Venus (catro resultados distintos):

$4! = 24$ casos, $P = \frac{24}{256} = \boxed{\frac{3}{32}}$. Catro iguais: 4 casos, $P = \frac{4}{256} = \boxed{\frac{1}{64}}$.

Pregunta 8. «STUDIARE» ten 8 letras distintas: $\boxed{8! = 40\,320}$ anagramas. Tratando «ARTE» como un bloque, permútanse 5 obxectos (ARTE, S, U, D, I): $\boxed{5! = 120}$. «VACANZA» ten 7 letras coa A repetida 3 veces: $\boxed{\frac{7!}{3!} = 840}$.

13 Alemaña

PISA 2025, matemáticas: 464 puntos

Dificultade relativa estimada: 6/10 (posto 7 dos 25 exames analizados; PAU de Galiza = 5)

Exame: Proba de Abitur 2026 de Matemáticas, nivel de esixencia elevado, Baviera (Bayern)

Nome orixinal: *Abiturprüfung 2026 – Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau), Prüfungsteil A e Prüfungsteil B*; elaborado polo Ministerio de Educación bávaro e publicado polo ISB (*Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung*)

Ano e convocatoria: 2026, convocatoria ordinaria (primeiro Abitur do novo bacharelato bávaro de nove anos, G9)

Duración: 300 minutos en total; a parte A débese entregar como moi tarde aos 110 minutos.

Calculadora: parte A sen ningún material (só dicionario ortográfico de alemán); parte B con calculadora científica autorizada, formulario oficial, táboas estocásticas e formulario científico autorizados.

Estrutura e cualificación: 100 BE (*Bewertungseinheiten*, unidades de cualificación). Parte A (30 BE): catro exercicios obrigatorios A1–A4 (5 BE cada un) e dous exercicios a escoller polo alumno entre A5–A10 (5 BE cada un). Parte B (70 BE): en cada bloque (Análise, Estocástica e Xeometría) a comisión da materia do centro (*Fachausschuss*) escolle un dos dous exercicios propostos (Análise: B1 ou B2, 30 BE; Estocástica: B3 ou B4, 20 BE; Xeometría: B5 ou B6, 20 BE).

Contexto: En Alemaña o Abitur (*allgemeine Hochschulreife*) é o título que dá acceso á universidade; cada Land organiza a súa proba, en parte con exercicios do banco común do IQB. En Baviera as Matemáticas son materia obrigatoria de exame escrito para todo o alumnado e examínanse no nivel elevado (equivalente ao antigo *Leistungskurs*). A nota do Abitur combina as cualificacións dos dous últimos cursos e as das probas finais.

Fonte: <https://www.isb.bayern.de/schularten/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung/mathematik/> (ficheiros 1607_Abiturpruefung_Mathematik_2026_-_Teil_A.pdf e ..._Teil_B.pdf)

Parte A (Prüfungsteil A)

Na resolución dos exercicios non se pode utilizar ningún material, coa excepción dun dicionario ortográfico de alemán que, segundo declaración da editorial, aplique integramente as normas oficiais vixentes.

Prazo máximo de entrega: 110 minutos despois do comezo da proba.

O caderno cos enunciados débese entregar.

Grupo de exercicios 1 (parte obrigatoria)

Débense resolver todos os exercicios A1 a A4.

A1 (Análise) (5 BE)

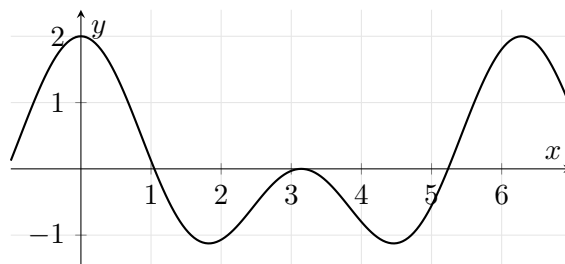
Dada a función $f: x \mapsto \frac{x}{\ln x}$ co dominio máximo D .

a) Xustifica que $D = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. (2)

b) A gráfica de f ten tanxente horizontal en exactamente un punto. Calcula a coordenada x dese punto. (3)

A2 (Análise) (5 BE)

A figura mostra a gráfica da función $g: x \mapsto \cos x + \cos(2x)$, definida en $\mathbb{R}$.



a) A gráfica de g corta o eixe y no punto S . Indica as coordenadas de S . (1)

b) Demostra mediante cálculo que a integral $\int_0^\pi g(x) dx$ vale 0, e interpreta xeometricamente este feito. (4)

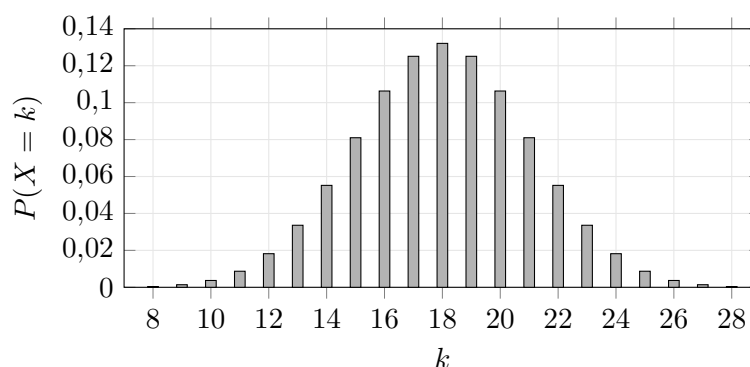
A3 (Estocástica)

(5 BE)

Considérase a variábel aleatoria X con distribución binomial de parámetros $n = 36$ e $p = 0,5$.

a) Indica un termo co que se poida calcular a probabilidade $P(X = 27)$. (1)

b) A figura mostra a distribución de probabilidade de X .



Determina un valor aproximado de $P(\mu - 0,5 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 0,5 \cdot \sigma)$, onde μ é o valor esperado e σ a desviación típica de X . (4)

A4 (Xeometría)

(5 BE)

Dadas a recta $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ con $t \in \mathbb{R}$ e o plano $E: -2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2 = 0$.

a) Xustifica que g é perpendicular a E , e demostra que o punto $P(-4 | -2 | 2)$ está en E . (2)

b) Determina as coordenadas dun punto de g que estea a distancia 12 de E . (3)

Grupo de exercicios 2 (parte optativa)

Dos exercicios A5 a A10, o alumno debe escoller dous calquera para resolver. Os exercicios escollidos débense marcar cun X na folla de portada.

A5 (Análise)

(5 BE)

A figura mostra a gráfica dunha función derivábel f , definida en $\mathbb{R}$, que ten exactamente dous ceros: $-1,5$ e 0 .

[Nota: Na figura: gráfica de f que corta o eixe x só en $x = -1,5$ e $x = 0$.]

Considérase a función integral $J: x \mapsto \int_0^x f(t) dt$, definida en $\mathbb{R}$.

Valora a seguinte afirmación: J ten exactamente dous ceros. (5)

A6 (Análise) (5 BE)

Dada unha función f , definida en $\mathbb{R}$, con conxunto imaxe (percorrido) $[-3; 2[$.

- Xustifica que a gráfica de f non é simétrica respecto da orixe de coordenadas. (1)
- Considérase a función h , definida en $\mathbb{R}$, con $h(x) = -2 \cdot f(x - 5) + 1$. Indica o conxunto imaxe de h e xustifica a túa resposta. (4)

A7 (Estocástica) (5 BE)

A figura mostra os desenvolvementos planos de dous dados, A e B.

[Nota: Na figura: desenvolvementos (redes) dos dados A e B cos números das súas caras.]

Nun xogo, en cada rolda lánzase unha vez cada un dos dous dados.

- Xógase dúas roldas. Determina a probabilidade de que nas dúas roldas se obteña co dado A un número maior ca co dado B. (3)
- Agora xógase catro roldas. En cada rolda calcúlase a suma dos dous números obtidos. Considérase o suceso «As catro sumas son distintas entre si». Indica en cada caso un número natural para v e para w de modo que coa expresión dada se poida calcular a probabilidade deste suceso. (2)

[Nota: A expresión dada é un produto do factor v por tres potencias de fraccións (aparecen as fraccións $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ e os expoñentes w , 2 e 2).]

A8 (Estocástica) (5 BE)

Nun recipiente hai cinco bólas, cada unha delas marcada cun número natural. En tres das bólas está o número a e nas outras dúas o número b . A suma de a e b é 17. Extráense ao chou dúas bólas simultaneamente.

- Indica, no contexto do problema, un suceso cuxa probabilidade se poida calcular co termo $1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$. (1)
- A variábel aleatoria X describe a suma dos números das dúas bólas extraídas. O valor esperado de X é 16. Determina a e b . (4)

A9 (Xeometría) (5 BE)

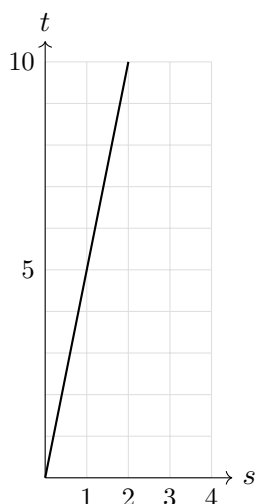
Dado o plano $E: 3x - 4y + 12z - 130 = 0$.

- Demostra que a orixe de coordenadas O está a distancia 10 de E . (2)
- Determina as coordenadas dun punto P que estea á mesma distancia da orixe O ca do plano E , pero que non estea na recta perpendicular a E que pasa por O . (3)

A10 (Xeometría) (5 BE)

Considéranse os triángulos AB_sC_t con $A(0|0|0)$, $B_s(4s|3s|0)$ e $C_t(0|0|t)$, con $s, t \in \mathbb{R}^+$.

- Xustifica que todo triángulo AB_sC_t é rectángulo no punto A . (2)
- Para cada valor de s hai un valor de t tal que o triángulo AB_sC_t é isóscele. Demostra que os puntos $(s|t)$ correspondentes están na recta representada na figura. (3)



Parte B (Prüfungsteil B)

Na resolución dos exercicios, unha vez entregada a parte A, pódense utilizar, ademais dun dicionario ortográfico de alemán que, segundo declaración da editorial, aplique integramente as normas oficiais vixentes, os seguintes materiais:

- o documento con fórmulas matemáticas aprobado polo Ministerio de Educación;
- unha das táboas estocásticas autorizadas polo Ministerio;
- unha das coleccións de fórmulas matemático-científicas autorizadas polo Ministerio para as probas;
- unha calculadora científica que cumpra a normativa establecida polo Ministerio.

Para cada un dos bloques de Análise, Estocástica e Xeometría, a comisión da materia escolle un dos dous exercicios para resolver.

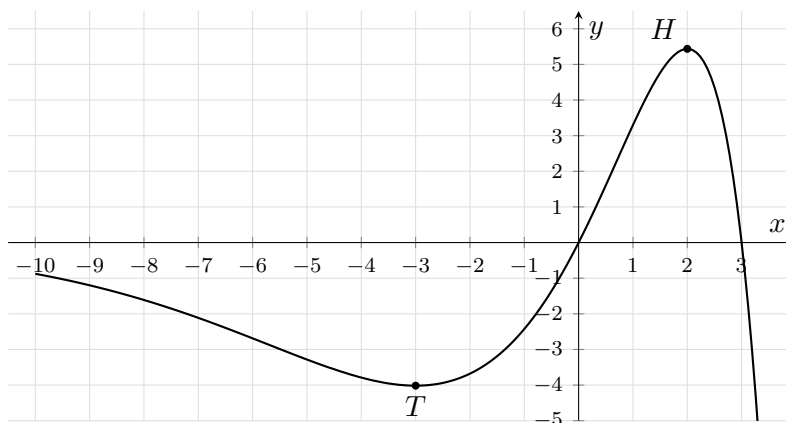
Prazo máximo de entrega: 300 minutos despois do comezo da proba.

O caderno cos enunciados débese entregar.

Exercicio B1 (Análise)

30 BE

Dada a función $f: x \mapsto (-x^2 + 3x) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$, definida en $\mathbb{R}$. A figura mostra a súa gráfica G , que ten exactamente dous puntos extremos: o mínimo $T\left(-3 \mid -18e^{-\frac{3}{2}}\right)$ e o máximo H .



- a) Verifícase $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. Interpreta xeometricamente este feito e calcula os ceros de f . (3)
- b) Calcula as coordenadas de H . Indica o conxunto imaxe de f e xustifica a túa resposta.
(para comprobación: $f'(x) = (-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$; $H(2 | 2e)$) (6)
- c) Determina a amplitude do ángulo co que se cortan a recta tanxente a G na orixe de coordenadas e a recta que pasa por T e H . (4)
- d) A función primeira derivada de f ten un máximo global. Describe como se pode calcular ese máximo. (2)

A enerxía liberada ao frear un coche eléctrico pódese aproveitar en parte para devolverlle enerxía á batería do coche. Durante un intervalo de 13 segundos, que comeza dez segundos antes do inicio dunha freada, obsérvase o estado de carga da batería dun coche eléctrico. A función f describe como modelo, para $x \in [-10; 3]$, a taxa de variación instantánea da enerxía almacenada na batería. O valor absoluto de x indica a distancia temporal ao inicio da freada en segundos; os valores negativos de x refírense a instantes anteriores ao comezo da freada. $f(x)$ é a taxa de variación instantánea da enerxía almacenada na batería en quilojoules por segundo.

- e) Indica, no contexto do problema, o significado do máximo H tendo en conta as súas coordenadas. (2)
- f) Determina coa axuda da figura, con precisión de segundos, a duración do intervalo de tempo no que se extraen da batería polo menos tres quilojoules por segundo. (2)
- g) Verifícase $\int_{-10}^3 f(x) dx \approx -15$. Interpreta o valor da integral no contexto do problema. (2)

Considérase a familia de funcións $g_a: x \mapsto -f(x) + a$, definidas en $\mathbb{R}$, con $a \in \mathbb{R}$. A gráfica de g_a denótase por G_a .

- h) Debuxa G_0 na figura. Indica como se obtén G_a a partir de G_0 para $a > 0$. (3)
- i) Indica os valores de a para os que G_a e G teñen exactamente dous puntos de corte. (3)
- j) Considérase agora a familia de funcións $g_{a,b}: x \mapsto -f(bx) + a$, definidas en $\mathbb{R}$, con $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Determina a e b de modo que se cumpran as seguintes condicións:
I A gráfica de $g_{a,b}$ ten como asíntota a recta de ecuación $y = 2$.
II A coordenada x do mínimo da gráfica de $g_{a,b}$ é $-0,5$. (3)

Exercicio B2 (Análise)

30 BE

- 1 Dada a familia de funcións $f_a: x \mapsto \frac{1}{4}x^3 + ax^2 + ax + \frac{1}{4}$, definidas en $\mathbb{R}$, con $a \in \mathbb{R}$. A gráfica de f_a denótase por G_a . A figura 1 mostra G_a para $a = 0$.

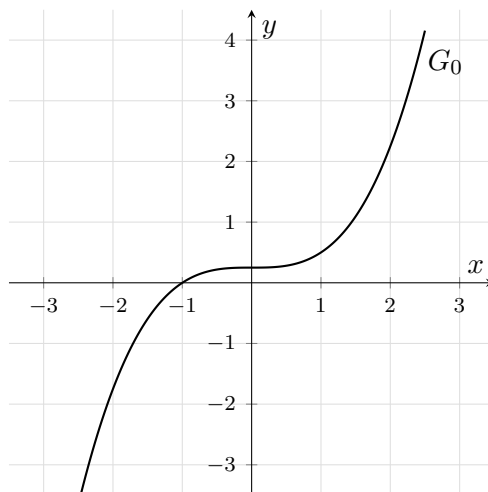


Fig. 1

- a) Calcula o valor de a para o cal o punto $(1 \mid -1)$ está en G_a , e demostra que este punto é punto de inflexión desa gráfica. (5)
- b) Demostra que hai exactamente dous puntos polos que pasan todas as gráficas da familia, e determina as coordenadas deses dous puntos. (4)
- c) A expresión dunha función da familia pódese escribir na forma $\frac{1}{4} \cdot (x+1)^3$. A gráfica desta función pódese obter a partir de G_0 mediante translacións. Indica unha posibilidade axeitada para esas translacións. (2)
- d) Considéranse, para cada valor $u > 0$, a recta tanxente t_u a G_0 no punto $P_u(u \mid f_0(u))$ e o punto $Q_u(u \mid 0)$. A tanxente t_u corta o eixe x nun punto que se denota por T_u .
Xustifica, mediante debuxos axeitados na figura 1, que $\overline{T_u Q_u} = \frac{f_0(u)}{f'_0(u)}$ para todo valor $u > 0$. (4)
- e) Hai circunferencias, cos centros no eixe y , que son tanxentes á gráfica da función primeira derivada de f_0 en exactamente dous puntos. O punto $A(1 \mid \frac{3}{4})$ é un punto de tanxencia dunha desas circunferencias.
Determina mediante cálculo a coordenada y do centro desa circunferencia. (5)

- 2** Considérase unha fonte de auga na que a auga sae por unha boquilla. O caudal instantáneo da auga na boquilla, que varía periodicamente, inflúe no aspecto da fonte.
A función $h: x \mapsto \cos(\frac{\pi}{4} \cdot x - \frac{\pi}{3}) + 1$, definida en $\mathbb{R}$, describe a continuación, para $x \geq 0$, a evolución temporal do caudal instantáneo da auga na boquilla. Aquí x é o tempo transcorrido desde o comezo da observación en segundos e $h(x)$ o caudal instantáneo en litros por segundo. Na figura 2 represéntase a gráfica de h .

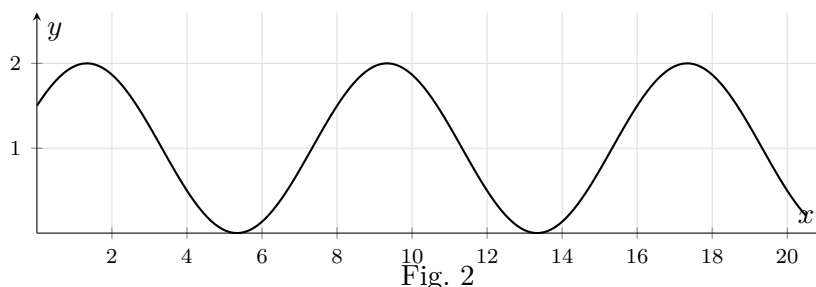


Fig. 2

- a) Determina cantas veces alcanza o caudal instantáneo o seu valor máximo no primeiro minuto despois do comezo da observación, e indica un instante no que o caudal instantáneo aumenta máis rapidamente. (3)

- b) Calcula $\int_5^9 h(x) dx$ e interpreta o valor da integral no contexto do problema. (4)
- c) Considérase agora outra boquilla na que o caudal instantáneo tamén varía periodicamente co tempo. O caudal instantáneo máximo é de 2 litros por segundo e o intervalo de tempo entre dous valores máximos consecutivos do caudal instantáneo é 1,5 veces maior ca na primeira boquilla. Esboza na figura 2 unha gráfica axeitada que describa, para $x \geq 0$, unha posíbel evolución temporal do caudal instantáneo da auga nesta boquilla. (3)

Exercicio B3 (Estocástica)

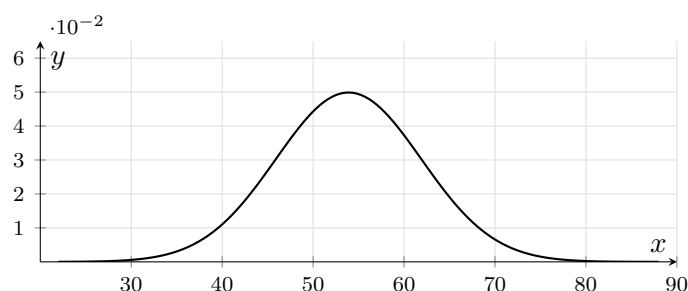
20 BE

Un grupo de doce estudantes fai varias excursións ao Parque Nacional de Berchtesgaden para estudar as lagartixas vivíparas (*Bergeidechsen*) que alí viven.

- En cada excursión o grupo estuda 20 lagartixas. O número de femias entre as 20 lagartixas pódese describir en cada caso mediante unha variábel aleatoria binomial X de parámetros $n = 20$ e p . O valor de p está suxeito a variacións estacionais. Para o período da primeira excursión, $p = 0,5$.
 - Determina as probabilidades dos seguintes sucesos:
 A: «Na súa primeira excursión o grupo estuda exactamente 10 lagartixas femias.»
 B: «Na súa primeira excursión o grupo estuda máis lagartixas femias ca machos.» (3)
 - Xustifica que, na primeira excursión, a probabilidade de que o valor de X se desvíe polo menos en 3 do valor esperado de X se pode calcular co termo $2 \cdot P_{0,5}^{20}(X \leq 7)$. (3)
 - Na segunda excursión, $p < 0,5$. Para certos valores de p , a probabilidade de que entre as 20 lagartixas estudadas haxa polo menos unha femia é polo menos do 98 %. Determina, con precisión de unidades porcentuais, o menor destes valores de p . (4)
- Os doce estudantes pasan a noite, despois da segunda excursión, nun refuxio de montaña con dous cuartos reservados só para este grupo; o «cuarto da montaña» ten oito camas e o «cuarto do val» sete. Supoñamos que a cada persoa do grupo se lle asigna ao chou unha cama libre. Determina, para este caso, a probabilidade de que en cada cuarto quede polo menos unha cama libre. (3)
- Entre a lonxitude cabeza-tronco e o sexo das lagartixas vivíparas hai unha correlación. Para unha lagartixa femia escollida ao chou, a lonxitude cabeza-tronco en milímetros pódese describir mediante unha variábel aleatoria normal Y . Para a función de densidade correspondente φ verifícase

$$\varphi(x) = \frac{1}{8\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-53,9}{8}\right)^2}.$$

A figura mostra a gráfica de φ .



- Determina a probabilidade de que unha lagartixa femia escollida ao chou mida menos de 48 mm. (2)

- b) Considérase a función Φ , definida en $\mathbb{R}$, con $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$. Describe o significado do termo $\Phi(0,8 \cdot 53,9) + (1 - \Phi(1,2 \cdot 53,9))$ no contexto do problema. (2)
- c) Tamén a lonxitude cabeza-tronco dunha lagartixa macho escollida ao chou se pode describir mediante unha variábel aleatoria normal, que se denota por Z . A lonxitude cabeza-tronco das lagartixas macho é, de media, de 48 mm. A probabilidade de que a lonxitude cabeza-tronco dunha lagartixa macho estea entre 41 mm e 55 mm é de aproximadamente o 68,3%. Valora, a partir desta información, se a desviación típica de Z é maior ou menor ca a desviación típica de Y . Esboza na figura a gráfica da función de densidade de Z . (3)

Exercicio B4 (Estocástica)

20 BE

- 1 Considéranse os vehículos a motor matriculados nun gran país europeo. Destes vehículos, o 80 % son turismos (Pkw).

- a) Escóllense ao chou 200 vehículos. Determina a probabilidade de que entre eles haxa como moito 170 turismos. (2)

A continuación estúdase tamén a antigüidade dos vehículos considerados. O 70,8 % destes vehículos teñen polo menos cinco anos.

- b) Completa a táboa de continxencia (táboa de catro campos) representada.

A: «Un vehículo ten polo menos cinco anos.» B: «Un vehículo é un turismo.»

	A	$\bar{A}$	
B			
$\bar{B}$		0,044	
			1

(2)

- c) Investiga se a proporción de vehículos que teñen polo menos cinco anos é maior entre os turismos ca entre os demais vehículos. (3)

A continuación considéranse os turismos matriculados. Estes asígnanse, segundo a súa antigüidade, a un de sete intervalos de tempo. A figura 1 mostra as proporcións correspondentes.

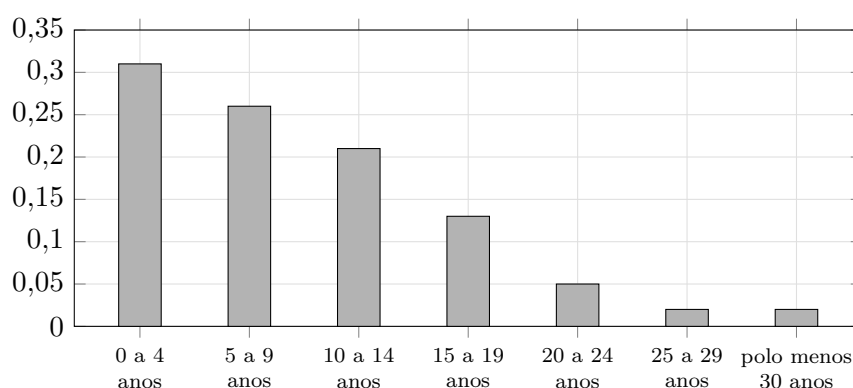


Fig. 1

- d) Todos os turismos matriculados ordénanse nunha lista segundo a súa antigüidade. Supoñamos que hai un turismo para o cal o número de turismos máis novos é igual ao número de turismos máis vellos. Indica en cal dos sete intervalos de tempo está a antigüidade deste turismo e xustifica a túa resposta. (2)

- e) Describe a relación matemática entre a figura 1 e o termo

$$5 \cdot 0,26 + 10 \cdot 0,21 + 15 \cdot 0,13 + 20 \cdot 0,05 + 25 \cdot 0,02 + 30 \cdot 0,02$$

e indica o significado do seu valor no contexto do problema. (3)

- 2 Nunha rexión considéranse as persoas que van regularmente ao traballo en turismo. Estudos anteriores revelaron que aproximadamente o 90 % destas persoas van soas no coche. Para reducir esta proporción creáronse incentivos para formar máis grupos para compartir coche. Agora quérese investigar se a proporción descrita diminuíu claramente. Para iso planéase realizar un test de significación cun nivel de significación do 5 % e a hipótese nula «A proporción de persoas que van soas ao traballo en turismo é polo menos do 75 %».

- a) Está previsto realizar o test a partir dunha mostra de 200 persoas. Determina a regra de decisión correspondente. (5)

- b) Supoñamos que o test se planease, coa mesma hipótese nula e o mesmo nivel de significación, con n persoas escollidas ao chou. A probabilidade de que unha persoa escollida ao chou vaia soa no coche ao traballo denótase por p .

A figura 2 representa, para un valor determinado de n e en función de p , a probabilidade de que o resultado do test estea na rexión de rexeitamento. Determina, para un exemplo escollido axeitadamente, a probabilidade do correspondente erro de tipo II coa axuda da figura 2. (3)

[Nota: Na figura 2: gráfica, en función de p , da probabilidade de que o resultado do test caia na rexión de rexeitamento (función de potencia do test).]

Exercicio B5 (Xeometría)

20 BE

Dado o rectángulo $ABCD$ con $A(6 | 0 | 9)$, $B(0 | 6 | 9)$ e $C(-1 | 5 | 17)$, que está no plano E .

- a) Determina as coordenadas de D . (2)

- b) Determina unha ecuación de E en forma xeral (cartesiana).
(para comprobación: $E: 4x + 4y + z - 33 = 0$) (3)

O rectángulo $ABCD$ representa como modelo unha diana de tiro con arco (cf. figura 1). No sistema de coordenadas, o plano xy describe o chan horizontal; unha unidade de lonxitude corresponde a un decímetro na realidade.

[Nota: Figura 1: fotografía/debuxo dunha diana de tiro con arco sobre un soporte inclinado.]

Á diana considerada esíxenselle os seguintes requisitos:

- I Un círculo de diana de 80 cm de diámetro cabe completamente na diana.
II A diana está inclinada cun ángulo entre 75° e 80° respecto do chan horizontal.

- c) Demostra mediante cálculo que se cumpre o requisito I. (2)

- d) Investiga se se cumpre o requisito II. (3)

No medio da diana está a zona dourada circular, de raio 8 cm, cuxo centro se representa polo punto $M(2,5 | 2,5 | 13)$.

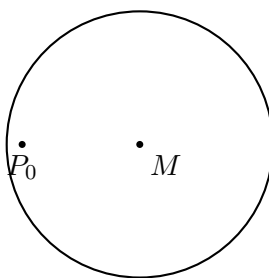
- e) A traxectoria da punta dunha frecha que impacta na diana descríbese mediante puntos da forma $(2s | 3s | -0,01s^2 + s + 12,01)$ con valores axeitados de $s \in \mathbb{R}$.
Demostra mediante cálculo que a frecha impacta na zona dourada. (6)

- f) A traxectoria dunha segunda frecha non se pode predicir con exactitude debido ás condicións do vento. As posíbeis posicións de impacto represéntanse polos puntos P_a , situados nun segmento, con

$$\overrightarrow{OP_a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 0,75 \\ -0,75 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e } a \in [0; 1],$$

onde O designa a orixe de coordenadas.

A figura 2 mostra o círculo que representa a zona dourada, o seu centro M e o punto P_0 . Demostra que o centro da zona dourada é unha posíbel posición de impacto da segunda frecha, e investiga, mediante debuxos axeitados na figura 2, se a segunda frecha impacta con seguridade na zona dourada. (4)

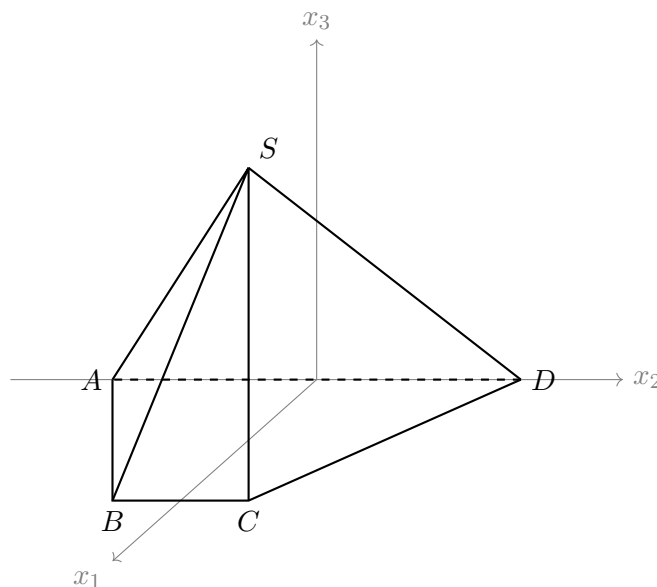


[Nota: Figura 2 a escala (en dm): círculo de raio 0,8 con centro M ; P_0 está a distancia $\sqrt{0,5} \approx 0,71$ de M , sobre a horizontal da diana.]

Exercicio B6 (Xeometría)

20 BE

A figura mostra a pirámide $ABCD S$ con $A(0 \mid -3 \mid 0)$, $B(4 \mid -1 \mid 0)$, $C(4 \mid 1 \mid 0)$, $D(0 \mid 3 \mid 0)$ e $S(2 \mid 0 \mid 4)$.



- Demostra que a base $ABCD$ é un trapezio e calcula o volume da pirámide. (4)
- Determina a amplitude do ángulo que forman as arestas CD e CS . (3)

O plano L de ecuación $-2x + y + 4 = 0$ corta a aresta CD no punto H .

- c) Calcula as coordenadas de H .
(para comprobación: $H(2,8 \mid 1,6 \mid 0)$) (4)

A pirámide $ABCD$ xírase arredor da recta CD un ángulo de 360° . Nese xiro, o vértice describe unha circunferencia.

- d) Xustifica que esta circunferencia está no plano L e que H é o centro da circunferencia. (4)
- e) A circunferencia que describe o vértice da pirámide ten raio $\sqrt{19,2}$.
Valora a seguinte afirmación: *Durante o xiro hai unha posición da pirámide na que o seu vértice ten coordenada y igual a 5,6.* (5)

Solucións

Parte A

Exercicio A1. a) O logaritmo só está definido para $x > 0$, e o denominador debe ser non nulo: $\ln x = 0 \iff x = 1$. Polo tanto $D = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

b) Pola regra do cociente,

$$f'(x) = \frac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}.$$

$f'(x) = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = e$ (que pertence a D). Coordenada x do punto con tanxente horizontal: $\boxed{x = e}$ (o punto é $(e \mid e)$).

Exercicio A2. a) $g(0) = \cos 0 + \cos 0 = 2$, logo $\boxed{S(0 \mid 2)}$.

b) Unha primitiva de g é $G(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin(2x)$, así que

$$\int_0^\pi g(x) dx = \left[\sin x + \frac{1}{2} \sin(2x) \right]_0^\pi = (0 + 0) - (0 + 0) = \boxed{0}.$$

Interpretación: en $[0; \pi]$ a gráfica de g ten os ceros $x = \frac{\pi}{3}$ e $x = \pi$ (pois $g(x) = 2 \cos^2 x + \cos x - 1 = (2 \cos x - 1)(\cos x + 1)$). A integral nula significa que a área do recinto comprendido entre a gráfica e o eixe x por riba do eixe (en $[0; \frac{\pi}{3}]$) é igual á área do recinto por debaixo do eixe (en $[\frac{\pi}{3}; \pi]$); de feito, ambas valen $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Exercicio A3. a) $P(X = 27) = \binom{36}{27} \cdot 0,5^{27} \cdot 0,5^9 = \boxed{\binom{36}{27} \cdot 0,5^{36}}$.

b) $\mu = np = 18$, $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{9} = 3$. Entón $\mu \pm 0,5\sigma$ dá o intervalo $[16,5; 19,5]$, que contén os valores $k = 17, 18, 19$. Lendo na figura:

$$P(16,5 \leq X \leq 19,5) = P(X = 17) + P(X = 18) + P(X = 19) \approx 0,125 + 0,132 + 0,125 \approx \boxed{0,38}.$$

Exercicio A4. a) O vector director de g , $\vec{u} = (-2, 1, -2)$, coincide co vector normal de E , $\vec{n} = (-2, 1, -2)$; logo $g \perp E$. Ademais $-2 \cdot (-4) + (-2) - 2 \cdot 2 - 2 = 8 - 2 - 4 - 2 = 0$, así que $P \in E$.

b) P é o punto de corte de g e E (pé da perpendicular). Como $|\vec{u}| = 3$, o punto $P + t\vec{u}$ está a distancia $3|t|$ de E ; $3|t| = 12 \iff t = \pm 4$:

$$\boxed{(-12 \mid 2 \mid -6)} \quad \text{ou} \quad (4 \mid -6 \mid 10).$$

(Comprobación: $|-2(-12) + 2 - 2(-6) - 2|/3 = 36/3 = 12$.)

Exercicio A5. [Nota: A resposta depende da gráfica de f . Dáse o razoamento completo e o criterio que hai que comprobar na gráfica.]

Por definición $J(0) = \int_0^0 f(t) dt = 0$, e polo teorema fundamental do cálculo $J' = f$. Como f só se anula en $-1,5$ e 0 , J é estritamente monótona en cada un dos intervalos $]-\infty; -1,5]$, $[-1,5; 0]$ e $[0; +\infty[$.

- En $[0; +\infty[$: J é estritamente monótona e $J(0) = 0$, logo $J(x) \neq 0$ para $x > 0$.
- En $[-1,5; 0[$: igualmente $J(x) \neq 0$; en particular $J(-1,5) = -\int_{-1,5}^0 f(t) dt \neq 0$, e $|J(-1,5)| = A_0$, a área entre a gráfica e o eixe x en $[-1,5; 0]$.
- En $]-\infty; -1,5[$: se f cambia de signo en $-1,5$ (a gráfica corta o eixe), J é monótona no sentido contrario e $J(x) = J(-1,5) + \int_{-1,5}^x f(t) dt$. Hai un (único) cero $x_0 < -1,5$ se e só se a área entre a gráfica e o eixe x en $[x_0; -1,5]$ alcanza o valor A_0 (comprobábel na figura contando cadros).

Conclusión: a afirmación é certa exactamente cando f cambia de signo en $-1,5$ e, á esquerda de $-1,5$, a gráfica encerra co eixe x unha área polo menos igual a A_0 ; nese caso os ceros de J son 0 e un único $x_0 < -1,5$. Se a área á esquerda de $-1,5$ é menor ca A_0 (ou f non cambia de signo en $-1,5$), J só ten o cero $x = 0$ e a afirmación é falsa. En ningún caso pode ter J máis de dous ceros.

Exercicio A6. a) Se a gráfica fose simétrica respecto da orixe, sería $f(-x) = -f(x)$ para todo x , e o conxunto imaxe sería simétrico respecto de 0 . Pero -3 pertence ao conxunto imaxe e 3 non. Logo non hai tal simetría.

b) A translación $x \mapsto x - 5$ non cambia o conxunto imaxe: $f(x - 5) \in [-3; 2[$. Multiplicar por -2 estira co factor 2 e inverte a orde: $-2f(x - 5) \in] -4; 6]$ (o valor -3 pasa a 6 , que se alcanza; o 2 non alcanzado pasa a -4 , que non se alcanza). Sumando 1 :

$$\boxed{W_h =] -3; 7]}.$$

Exercicio A7. [Nota: Os valores numéricos de a) dependen dos números das caras dos dados. En b) supoñemos que a expresión dada é $v \cdot (\frac{1}{2})^w \cdot (\frac{1}{3})^2 \cdot (\frac{2}{3})^2$.]

a) Sexa q a probabilidade de que, nunha rolda, o dado A amose un número maior ca o dado B; q se obtén contando nos desenvolvementos os pares de caras (A,B) con número de A maior (de entre os 36 pares equiprobábeis). Entón, por independencia das roldas, a probabilidade pedida é $\boxed{q^2}$.

b) A expresión ten a forma $v \cdot (\frac{1}{2})^w \cdot (\frac{1}{3})^2 \cdot (\frac{2}{3})^2$. Isto corresponde a dados con dous números cada un: un dado (A) cun número en 2 caras (probabilidade $\frac{1}{3}$) e outro en 4 caras ($\frac{2}{3}$), e o outro dado (B) con dous números en 3 caras cada un ($\frac{1}{2}$), de xeito que hai exactamente catro sumas posíbeis, con probabilidades $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$, $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$, $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$. As catro sumas son distintas se e só se aparecen as catro sumas posíbeis nalgunha orde; hai $4! = 24$ ordes, e cada unha ten probabilidade $(\frac{1}{2})^4 (\frac{1}{3})^2 (\frac{2}{3})^2$. Logo

$$\boxed{v = 24, \quad w = 4} \quad \left(P = 24 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{27} \approx 0,074 \right).$$

Exercicio A8. a) $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$ é a probabilidade de extraer dúas bólas co número b (2 de 5, despois 1 de 4). O complementario: «*Polo menos unha das bólas extraídas leva o número a .*»

b) Hai $\binom{5}{2} = 10$ pares equiprobábeis: $\binom{3}{2} = 3$ dan suma $2a$, $3 \cdot 2 = 6$ dan $a + b$ e 1 dá $2b$. Entón

$$E(X) = \frac{3}{10} \cdot 2a + \frac{6}{10}(a + b) + \frac{1}{10} \cdot 2b = 1,2a + 0,8b = 16.$$

Con $b = 17 - a$: $1,2a + 13,6 - 0,8a = 16 \Rightarrow 0,4a = 2,4 \Rightarrow \boxed{a = 6, b = 11}$.

Exercicio A9. a) $d(O, E) = \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 12 \cdot 0 - 130|}{\sqrt{9 + 16 + 144}} = \frac{130}{13} = 10$.

b) Buscamos, por exemplo, un punto do eixe x , $P(p | 0 | 0)$, con $|p| = \frac{|3p - 130|}{13}$, é dicir, $13|p| = |3p - 130|$. Para $p < 0$: $-13p = -3p + 130 \Rightarrow p = -13$. Así

$$\boxed{P(-13 | 0 | 0)}: \quad \overline{OP} = 13, \quad d(P, E) = \frac{|-39 - 130|}{13} = 13.$$

A recta perpendicular a E por O é $\vec{X} = \lambda(3, -4, 12)$; o único punto dela con $y = z = 0$ é O , logo P non está nela. (Tamén vale $P(8, 125 | 0 | 0)$.)

Exercicio A10. a) $\overrightarrow{AB_s} = (4s, 3s, 0)$ e $\overrightarrow{AC_t} = (0, 0, t)$; o seu produto escalar é 0, logo os catetos AB_s e AC_t son perpendiculares e o ángulo en A é recto.

b) Nun triángulo rectángulo a hipotenusa é estritamente maior ca cada cateto, así que o triángulo é isóscele só se $\overline{AB_s} = \overline{AC_t}$: $\sqrt{16s^2 + 9s^2} = 5s = t$. Os puntos $(s | t)$ están na recta $\boxed{t = 5s}$, que pasa pola orixe e por $(2 | 10)$: é a recta da figura.

Parte B

Exercicio B1. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$: o eixe x (recta $y = 0$) é asíntota horizontal de G para $x \rightarrow -\infty$. Ceros: $e^{x/2} > 0$, logo $f(x) = 0 \iff x(3 - x) = 0 \iff \boxed{x = 0 \text{ ou } x = 3}$.

b) $f'(x) = (-2x + 3)e^{x/2} + \frac{1}{2}(-x^2 + 3x)e^{x/2} = (-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3)e^{x/2} = -\frac{1}{2}(x - 2)(x + 3)e^{x/2}$. Os ceros son -3 (mínimo T) e 2 ; f' pasa de positiva a negativa en 2 , logo máximo en $x = 2$, con $f(2) = 2e^1$: $\boxed{H(2 | 2e)}$, $2e \approx 5,44$.

Conxunto imaxe: para $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow -\infty$ (o factor $-x^2 + 3x \rightarrow -\infty$ e $e^{x/2} \rightarrow +\infty$). En $] -\infty; -3]$ os valores están entre $f(T) \approx -4,02$ e 0 ; o maior valor de f é $2e$ (único máximo, e $2e > 0$). Por continuidade, $\boxed{W_f =] -\infty; 2e]}$.

c) Tanxente na orixe: $m_1 = f'(0) = 3$, ángulo de inclinación $\alpha_1 = \arctan 3 \approx 71,57^\circ$. Recta TH :

$$m_2 = \frac{2e + 18e^{-3/2}}{5} \approx 1,891, \quad \alpha_2 = \arctan m_2 \approx 62,12^\circ.$$

Ángulo de corte: $\boxed{\alpha_1 - \alpha_2 \approx 9,4^\circ}$.

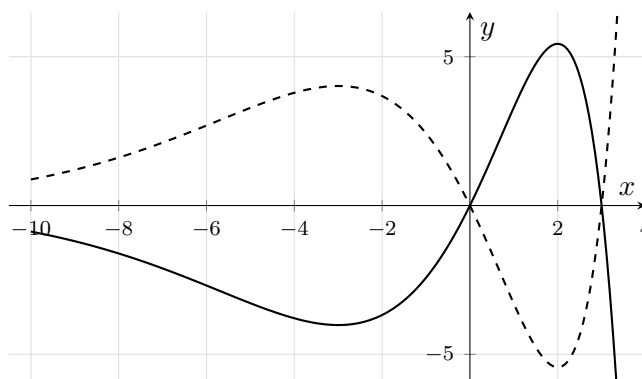
d) Cálculanse os ceros de f'' e estúdase o signo: o máximo local de f' está onde f'' cambia de $+$ a $-$. Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -\infty$, compárase o valor de f' no máximo local con estes comportamentos (e co mínimo local) para confirmar que é global. (Explicitamente: $f''(x) = -\frac{1}{4}(x^2 + 5x - 4)e^{x/2}$, ceros $x = \frac{-5 \pm \sqrt{41}}{2}$; o máximo global de f' está en $x = \frac{-5 + \sqrt{41}}{2} \approx 0,70$ e vale $\approx 3,41$.)

e) Dous segundos despois do inicio da freada a enerxía almacenada na batería aumenta máis rapidamente: a taxa de carga é máxima e vale $2e \approx 5,4$ kJ por segundo.

f) Extráense polo menos 3 kJ/s cando $f(x) \leq -3$. Na figura, G está por debaixo de $y = -3$ aproximadamente entre $x \approx -5,5$ e $x \approx -1,4$ (numericamente $-5,48$ e $-1,36$). Duración: $\boxed{\approx 4 \text{ s}}$.

g) A integral é a variación total da enerxía almacenada na batería no intervalo de 13 segundos: ao final do intervalo hai uns 15 kJ menos na batería ca ao principio (a enerxía extraída antes da freada supera a recuperada durante ela).

h) G_0 é a simétrica de G respecto do eixe x (gráfica de $-f$). Para $a > 0$, G_a obtense desprazando G_0 a unidades cara arriba (en dirección y positiva).



i) $G_a \cap G$: $-f(x) + a = f(x) \iff f(x) = \frac{a}{2}$. Do estudo de monotonía: f decrece en $] -\infty; -3]$ de 0 a $f(T) = -18e^{-3/2}$ (sen alcanzar 0), crece en $[-3; 2]$ ata $2e$ e decrece en $[2; \infty[$ ata $-\infty$. Polo tanto a ecuación $f(x) = c$ ten exactamente dúas solucións se $0 \leq c < 2e$ (unha en $] -3; 2[$ e outra en $]2; \infty[$) ou se $c = f(T)$ (en -3 e outra en $]2; \infty[$); ten tres para $f(T) < c < 0$, unha para $c < f(T)$ ou $c = 2e$, e ningunha para $c > 2e$. Con $c = \frac{a}{2}$:

$$\boxed{a \in [0; 4e[\quad \text{ou} \quad a = -36e^{-3/2} \approx -8,03}.$$

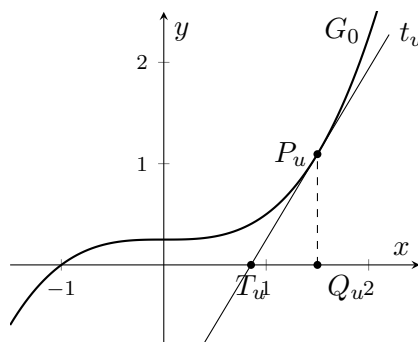
j) Se $b \neq 0$, para $x \rightarrow \pm\infty$ (o signo que fai $bx \rightarrow -\infty$) temos $f(bx) \rightarrow 0$ e $g_{a,b}(x) \rightarrow a$; a outra rama vai a $+\infty$. Condición I: $\boxed{a = 2}$. O mínimo de $g_{a,b}$ corresponde ao máximo de $f(bx)$, é dicir, a $bx = 2$ ($-f$ só ten un mínimo, en $x = 2$). Condición II: $b \cdot (-0,5) = 2 \Rightarrow \boxed{b = -4}$.

Exercicio B2. 1 a) $f_a(1) = \frac{1}{4} + a + a + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + 2a = -1 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{3}{4}}$. Entón $f''(x) = \frac{3}{2}x + 2a = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$, que se anula en $x = 1$ e cambia de signo ($f''' = \frac{3}{2} \neq 0$): $(1 | -1)$ é punto de inflexión.

b) $f_a(x) = \frac{1}{4}(x^3 + 1) + a(x^2 + x)$. Un punto $(x | y)$ está en todas as gráficas se e só se o valor non depende de a , é dicir, $x^2 + x = 0 \iff x \in \{0, -1\}$ (se $x^2 + x \neq 0$, valores distintos de a dan valores distintos de $f_a(x)$). Os puntos son $\boxed{(0 | \frac{1}{4}) \text{ e } (-1 | 0)}$.

c) $\frac{1}{4}(x+1)^3 = \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = f_{3/4}(x)$. Como $f_0(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{4}$, primeiro desprázase G_0 $\frac{1}{4}$ cara abaixo (gráfica de $\frac{1}{4}x^3$) e despois 1 unidade cara á esquerda.

d) Para $u > 0$ é $f_0(u) > 0$ e $f'_0(u) = \frac{3}{4}u^2 > 0$, logo T_u está á esquerda de Q_u . O triángulo $T_u Q_u P_u$ é rectángulo en Q_u , cun cateto vertical de lonxitude $\overline{Q_u P_u} = f_0(u)$ e un horizontal $\overline{T_u Q_u}$; a pendente da tanxente é o cociente entre eles: $f'_0(u) = \frac{f_0(u)}{\overline{T_u Q_u}}$, de onde $\overline{T_u Q_u} = \frac{f_0(u)}{f'_0(u)}$.



e) $f'_0(x) = \frac{3}{4}x^2$ e $f'_0(1) = \frac{3}{4}$, logo A está na gráfica. A pendente da tanxente en A é $f''_0(1) = \frac{3}{2}$. Na circunferencia tanxente, o raio que vai ao punto de tanxencia é perpendicular á tanxente, logo o centro está na recta normal en A : $y - \frac{3}{4} = -\frac{2}{3}(x - 1)$. Para $x = 0$: $y_M = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{17}{12}$.

(Comprobación: $d(x)^2 = x^2 + (\frac{3}{4}x^2 - \frac{17}{12})^2$ ten $\frac{d}{dx}d^2 = \frac{9}{4}x(x-1)(x+1)$, con mínimos só en $x = \pm 1$: a circunferencia de raio $\sqrt{13}/3$ toca a parábola exactamente en $(\pm 1 | \frac{3}{4})$.)

2 a) Período $T = \frac{2\pi}{\pi/4} = 8$ s. Máximos cando $\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi$, é dicir, $x = \frac{4}{3} + 8k$; en $[0; 60]$: $k = 0, \dots, 7$ ($x = \frac{4}{3}, \frac{28}{3}, \dots, \frac{172}{3} \approx 57,3$). O caudal máximo alcánzase 8 veces. O aumento máis rápido (máximo de h' , punto de inflexión de subida) dáse cando $\sin(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{3}) = -1$: $x = -\frac{2}{3} + 8k$, por exemplo $x = \frac{22}{3} \approx 7,3$ s (onde $h' = \frac{\pi}{4}$).

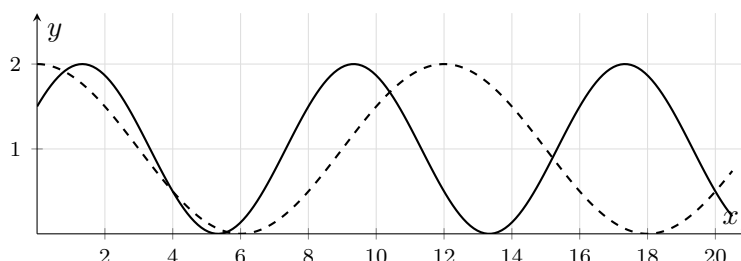
b)

$$\int_5^9 h(x) dx = \left[\frac{4}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{3}\right) + x \right]_5^9 = 4 + \frac{4}{\pi} \left(\sin \frac{23\pi}{12} - \sin \frac{11\pi}{12} \right)$$

$$= 4 - \frac{8}{\pi} \sin \frac{\pi}{12} = \left[4 - \frac{2(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{\pi} \right] \approx 3,34.$$

Entre os segundos 5 e 9 da observación saen pola boquilla uns 3,34 litros de auga.

c) Período $1,5 \cdot 8 = 12$ s e máximo 2 L/s. Unha posibilidade: $k(x) = \cos(\frac{\pi}{6}x) + 1$ (máximos de valor 2 en $x = 0, 12, 24, \dots$; mínimo 0). Calquera gráfica periódica de período 12 con máximo 2 e valores non negativos é válida.



Exercicio B3. 1 a) $X \sim B(20; 0,5)$. $P(A) = P(X = 10) = \binom{20}{10} 0,5^{20} \approx \left[0,176 \right]$. $P(B) = P(X \geq 11) = \frac{1-P(X=10)}{2} \approx \left[0,412 \right]$ (pola simetría da distribución con $p = 0,5$).

b) $E(X) = 10$. $|X - 10| \geq 3 \iff X \leq 7$ ou $X \geq 13$. Con $p = 0,5$ a distribución é simétrica respecto de 10: $P(X \geq 13) = P(X \leq 7)$. Logo $P(|X - 10| \geq 3) = 2 \cdot P_{0,5}^{20}(X \leq 7) (\approx 0,263)$.

c) $P(X \geq 1) = 1 - (1 - p)^{20} \geq 0,98 \iff (1 - p)^{20} \leq 0,02 \iff p \geq 1 - 0,02^{1/20} \approx 0,1777$. Con precisión de puntos porcentuais: $p = 18\%$ (con $p = 17\%$: $0,976 < 0,98$; con 18% : $0,981$).

2 Hai 15 camas e 12 persoas, logo quedan 3 camas libres, e por simetría o conxunto das 3 camas libres é un subconxunto aleatorio uniforme de 3 das 15 camas. O suceso contrario é que as tres

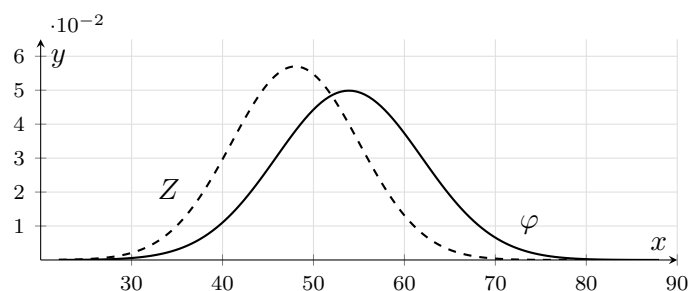
camas libres estean no mesmo cuarto:

$$P = 1 - \frac{\binom{8}{3} + \binom{7}{3}}{\binom{15}{3}} = 1 - \frac{56 + 35}{455} = \boxed{\frac{4}{5} = 0,8}.$$

3 a) $Y \sim N(53,9; 8)$: $P(Y < 48) = \Phi_{\text{std}}\left(\frac{48-53,9}{8}\right) = \Phi_{\text{std}}(-0,7375) \approx \boxed{0,230}$.

b) $\Phi(0,8\mu) + 1 - \Phi(1,2\mu)$ con $\mu = 53,9$ é a probabilidade de que a lonxitude cabeza-tronco dunha femia escollida ao chou se desvíe máis dun 20 % do valor medio (menos de 43,12 mm ou máis de 64,68 mm); vale $\approx 0,178$.

c) $41 = 48 - 7$ e $55 = 48 + 7$, e $P(\mu - \sigma \leq Z \leq \mu + \sigma) \approx 68,3\%$ para calquera normal. Logo $\sigma_Z = 7 < 8 = \sigma_Y$: a desviación típica de Z é **menor**. A densidade de Z ten máximo en $x = 48$, máis alto ($\frac{1}{7\sqrt{2\pi}} \approx 0,057$ fronte a $\approx 0,050$) e é máis estreita:



Exercicio B4. 1 a) $X \sim B(200; 0,8)$: $P(X \leq 170) \approx \boxed{0,972}$ (táboa ou calculadora).

b) Con $P(A) = 0,708$, $P(B) = 0,8$ e $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,044$:

	A	$\bar{A}$	
B	0,552	0,248	0,8
$\bar{B}$	0,156	0,044	0,2
	0,708	0,292	1

(Coherente coa figura 1: $P_B(A) = 0,552/0,8 = 0,69 = 1 - 0,31$.)

c) $P_B(A) = \frac{0,552}{0,8} = 0,69$ e $P_{\bar{B}}(A) = \frac{0,156}{0,2} = 0,78$. A proporción de vehículos con polo menos cinco anos **non** é maior entre os turismos (69 %) ca entre os demais vehículos (78 %); é menor.

d) Ese turismo é a mediana da antigüidade: ten o 50 % dos turismos por debaixo. Proporções acumuladas: $0,31 < 0,5$ e $0,31 + 0,26 = 0,57 \geq 0,5$. Logo está no intervalo **de 5 a 9 anos**.

e) O termo é a suma dos produtos do límite inferior de cada intervalo pola proporción (altura da barra) correspondente; o intervalo de 0 a 4 anos contribúe con $0 \cdot 0,31 = 0$. O seu valor é 7,45: é unha estimación por defecto (cota inferior) da antigüidade media dos turismos matriculados, que é polo menos de aproximadamente 7,5 anos.

2 a) X : número de persoas que van soas, entre as 200; baixo H_0 con $p = 0,75$, $X \sim B(200; 0,75)$. Test unilateral á esquerda: rexéitase H_0 se $X \leq k$, con k máximo tal que $P_{0,75}(X \leq k) \leq 0,05$. Da táboa: $P(X \leq 139) \approx 0,045 \leq 0,05$ e $P(X \leq 140) \approx 0,062 > 0,05$. Regra de decisión:

rexear H_0 se $X \in \{0, 1, \dots, 139\}$; non rexearla se $X \in \{140, \dots, 200\}$.

b)

[Nota: O valor depende da lectura da figura 2; descríbese o procedemento e dáse un exemplo calculado con $n = 200$.]

O erro de tipo II cométese cando H_0 é falsa (é dicir, $p < 0,75$) e o resultado non cae na rexión de rexeitamento. Escólese un $p < 0,75$, por exemplo $p = 0,65$; na figura 2 lese a probabilidade $\pi(p)$ de que o resultado estea na rexión de rexeitamento, e a probabilidade do erro de tipo II é $\beta = 1 - \pi(p)$. Exemplo con $n = 200$ e a regra de a): $\pi(0,65) = P_{0,65}(X \leq 139) \approx 0,922$, logo $\beta = P_{0,65}(X \geq 140) \approx 0,078$.

Exercicio B5. a) Nun rectángulo $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$: $D = A + C - B = \boxed{(5 \mid -1 \mid 17)}$. (Ademais $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (-6, 6, 0) \cdot (-1, -1, 8) = 0$).

b) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = (48, 48, 12) = 12(4, 4, 1)$. Con A : $4 \cdot 6 + 0 + 9 = 33$, logo $\boxed{E: 4x + 4y + z - 33 = 0}$.

c) $\overline{AB} = \sqrt{72} \approx 8,49$ dm e $\overline{BC} = \sqrt{66} \approx 8,12$ dm. Os dous lados miden máis de 8 dm = 80 cm, logo un círculo de 80 cm de diámetro cabe na diana (centrado no centro do rectángulo).

d) O ángulo α entre E e o chan ($x_3 = 0$, normal $(0, 0, 1)$) cumpre

$$\cos \alpha = \frac{|(4, 4, 1) \cdot (0, 0, 1)|}{\sqrt{33}} = \frac{1}{\sqrt{33}} \Rightarrow \alpha \approx 79,98^\circ.$$

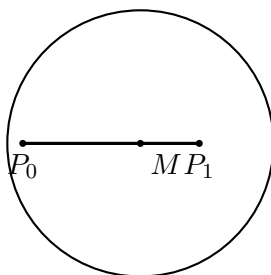
Como $75^\circ < 79,98^\circ < 80^\circ$, o requisito II cúmprese (por moi pouco).

e) Substituíndo en E : $8s + 12s - 0,01s^2 + s + 12,01 - 33 = 0 \iff s^2 - 2100s + 2099 = 0 \iff s = 1$ ou $s = 2099$. O valor $s = 2099$ dá $x_3 < 0$ (debaixo do chan) e non ten sentido; o impacto é para $s = 1$, no punto $P(2 \mid 3 \mid 13)$. Entón

$$\overline{PM} = \sqrt{0,5^2 + 0,5^2 + 0^2} = \sqrt{0,5} \approx 0,707 \text{ dm} \approx 7,1 \text{ cm} < 8 \text{ cm},$$

así que a frecha impacta na zona dourada.

f) $P_a = (2 + 0,75a \mid 3 - 0,75a \mid 13) = M$ para $a = \frac{2}{3} \in [0; 1]$: o centro M é unha posíbel posición de impacto. O segmento vai de $P_0(2 \mid 3 \mid 13)$ a $P_1(2,75 \mid 2,25 \mid 13)$ e pasa por M ; como $\overrightarrow{MP_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{P_0M}$, na figura trázase desde P_0 a recta que pasa por M e prolóngase máis aló de M a metade da lonxitude $\overline{P_0M}$. Os dous extremos están dentro do círculo ($\overline{MP_0} \approx 0,71$ dm, $\overline{MP_1} \approx 0,35$ dm, ambos $< 0,8$ dm) e o círculo é convexo, logo todo o segmento está na zona dourada: **a segunda frecha impacta con seguridade na zona dourada.**



Exercicio B6. a) $\overrightarrow{BC} = (0, 2, 0)$ e $\overrightarrow{AD} = (0, 6, 0) = 3\overrightarrow{BC}$: $BC \parallel AD$, mentres que $\overrightarrow{AB} = (4, 2, 0)$ e $\overrightarrow{DC} = (4, -2, 0)$ non son paralelos. Os catro puntos están no plano $x_3 = 0$, logo $ABCD$ é un trapecio de bases $\overline{AD} = 6$, $\overline{BC} = 2$ e altura 4 (distancia entre as rectas $x_1 = 0$ e $x_1 = 4$). Área = $\frac{6+2}{2} \cdot 4 = 16$; altura da pirámide = 4 (cota de S):

$$V = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 4 = \boxed{\frac{64}{3} \approx 21,3}.$$

b) $\overrightarrow{CD} = (-4, 2, 0)$, $\overrightarrow{CS} = (-2, -1, 4)$: $\cos \gamma = \frac{8-2}{\sqrt{20}\sqrt{21}} = \frac{6}{\sqrt{420}} \Rightarrow \boxed{\gamma \approx 72,98^\circ}$.

c) Recta CD : $\vec{X} = (4, 1, 0) + r(-4, 2, 0)$. En L : $-2(4-4r) + (1+2r) + 4 = 0 \Rightarrow 10r = 3 \Rightarrow r = 0,3$, e $\boxed{H(2,8 \mid 1,6 \mid 0)}$.

d) O vector normal de L , $(-2, 1, 0)$, é paralelo a $\overrightarrow{CD} = 2(-2, 1, 0)$, logo $L \perp CD$. Ademais $S \in L$: $-4 + 0 + 4 = 0$. Nun xiro arredor dun eixe, cada punto describe unha circunferencia no plano perpendicular ao eixe que pasa por el, co centro no punto de corte dese plano co eixe. Para S , ese plano é L e o punto de corte de L coa recta CD é H .

e) (Comprobación: $\overrightarrow{HS} = (-0,8, -1,6, 4)$, $|\overrightarrow{HS}|^2 = 19,2$.) Base ortonormal do plano director de L : $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 0, 1)$. Os puntos da circunferencia son $H + \sqrt{19,2}(\cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2)$, cuxa coordenada y é $1,6 + \sqrt{19,2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cos \theta$. O seu valor máximo é

$$y_{\max} = 1,6 + \frac{2\sqrt{19,2}}{\sqrt{5}} = 1,6 + \sqrt{15,36} = 1,6 + 3,92 \approx 5,52 < 5,6.$$

A afirmación é **falsa**: o vértice nunca alcanza a coordenada $y = 5,6$.

14 Portugal

PISA 2025, matemáticas: 460 puntos

Dificultade relativa estimada: 5/10 (posto 12 dos 25 exames analizados; PAU de Galiza = 5)

Exame: Exame Final Nacional do Ensino Secundário — Matemática A (proba 635), 12.º ano de escolaridade

Nome orixinal: *Exame Final Nacional de Matemática A, Prova 635* (Ensino Secundário)

Año e convocatoria: 2025, 1.ª fase (xuño de 2025)

Duración: 150 minutos + 30 minutos de tolerancia **Calculadora:** calculadora gráfica permitida (algúns itens deben resolverse sen ela)

Estrutura e cualificación: 15 exercicios (18 itens), escala de 0 a 200 puntos. 12 itens obrigatorios (158 puntos); dos 6 itens restantes só contan os 3 coa mellor puntuación ($3 \times 14 = 42$ puntos). Itens de escolla múltipla (12 puntos) e de resposta aberta (14 puntos). Inclúe formulario.

Contexto: Exame nacional elaborado polo IAVE (Instituto de Avaliação Educativa) ao final do ensino secundario no itinerario de Ciencias e Tecnoloxías e de Ciencias Socioeconómicas. Serve como *prova de ingreso* no Concurso Nacional de Acesso ao Ensino Superior para os graos de ciencias, enxeñaría e economía, e pondera tamén na cualificación final da disciplina.

Fonte: https://iave.pt/wp-content/uploads/2025/06/EX-MatA635-F1-2025_net.pdf (enunciado oficial); criterios de corrección: <https://www.examesnacionais.com.pt/exames-nacionais/12ano/2025-1fase/Matematica-Criterios.pdf>

Instrucións

A proba inclúe 12 itens, debidamente identificados no enunciado, cuxas respostas contribúen obrigatoriamente para a cualificación final. Dos restantes 6 itens da proba, só contribúen para a cualificación final os 3 itens cuxas respostas obteñan mellor puntuación.

Para cada resposta, identifica o item.

Utiliza só bolígrafo ou esferográfica de tinta azul ou negra.

Non se permite o uso de corrector. Risca aquilo que pretendas que non sexa cualificado.

Permítese o uso de regra, compás, escuadro, transportador e calculadora gráfica.

Presenta só unha resposta para cada item.

As puntuacións dos itens atópanse ao final do enunciado da proba.

A proba inclúe un formulario.

Nas respostas aos itens de escolla múltipla, selecciona a opción correcta. Escribe, na folla de respostas, o número do item e a letra que identifica a opción escollida.

Nas respostas aos restantes itens, presenta todos os cálculos que teñas que efectuar e todas as xustificacións necesarias. Cando, para un resultado, non se pide a aproximación, presenta sempre o valor exacto.

Formulario

Xeometría. Lonxitude dun arco de circunferencia: αr (α — amplitude, en radiáns, do ángulo ao centro; r — raio). Área dun polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apotema. Área dun sector circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α — amplitude, en radiáns, do ángulo ao centro; r — raio). Área lateral dun cono: $\pi r g$ (r — raio da base; g — xeratríz). Área dunha superficie esférica: $4\pi r^2$ (r — raio). Volume dunha

pirámide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$. Volume dun cono: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$. Volume dunha esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r — raio).

Progresións. Suma dos n primeiros termos dunha progresión (u_n) : progresión aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$; progresión xeométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$.

Trigonometría. $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$; $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

Complexos. $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$; $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$).

Regras de derivación. $(u + v)' = u' + v'$; $(uv)' = u'v + uv'$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; $(u^n)' = n u^{n-1} u'$ ($n \in \mathbb{R}$); $(\sin u)' = u' \cos u$; $(\cos u)' = -u' \sin u$; $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$; $(e^u)' = u' e^u$; $(a^u)' = u' a^u \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$); $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$; $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$).

Límites notábeis. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$); $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$).

Enunciados

1. Cal é o límite da sucesión de termo xeral $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$?

- (A) $e + 3$
- (B) $3e$
- (C) e^3
- (D) $\frac{e}{3}$

2. Sexa g a función, de dominio $[-3, \pi]$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{1 - \sqrt{1 - x}} & \text{se } -3 \leq x < 0 \\ 2 \sin^2 x - \sqrt{3}x + 2 & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Resolve os itens 2.1. e 2.2. sen recorrer á calculadora.

2.1. Investiga se a función g é continua en $x = 0$.

2.2. Estuda, no intervalo $]0, \pi]$, a función g en canto á monotonía e en canto á existencia de extremos relativos.

Na túa resposta, presenta os intervalos de monotonía e os valores de x para os que a función g ten extremos relativos.

3. O produto do segundo elemento polo penúltimo elemento dunha dada liña do triángulo de Pascal é 625.

Cal é o quinto elemento da liña anterior?

- (A) 10 626
- (B) 12 650
- (C) 42 504
- (D) 53 130

4. Unha academia de danza ofrece as modalidades de ballet clásico e de danza contemporánea, entre outras.

Relativamente aos alumnos que frecuentan a academia, sábese que:

- o 60 % están inscritos en ballet clásico;
- o 25 % están inscritos en danza contemporánea e non están inscritos en ballet clásico;
- a metade dos inscritos en danza contemporánea tamén están inscritos en ballet clásico.

Seleccionouse, ao chou, un alumno da academia que non está inscrito en danza contemporánea.

Determina a probabilidade de que ese alumno estea inscrito en ballet clásico.

Presenta o resultado en forma de número decimal.

5. Na táboa seguinte preséntanse os datos relativos ao diámetro biparietal, x , en centímetros, medido na trixésimo cuarta semana de embarazo, e ao correspondente perímetro cefálico, y , en centímetros, medido ao nacer, dunha mostra de oito recentemente nados nunha maternidade.

Diámetro biparietal en cm (x)	7,49	7,81	8,21	8,30	8,66	8,76	9,04	9,24
Perímetro cefálico en cm (y)	30,36	31,99	33,66	35,26	35,51	34,86	35,30	37,63

Completa o texto seguinte, seleccionando a opción correcta para cada espazo, de acordo cos datos presentados na táboa.

Escribe, na folla de respostas, só cada un dos números, I, II, III e IV, seguido da opción, a), b) ou c), seleccionada. A cada espazo correspóndelle unha soa opción.

A mediana dos diámetros biparietais presentados excede a respectiva media, arredondada ás centésimas, en I cm.

A amplitude da mostra dos perímetros cefálicos presentados é II cm.

O coeficiente de correlación linear entre as variábeis x e y , presentadas na táboa, arredondado ás centésimas, é III.

Admitindo a validez do modelo de regresión linear de y en función de x , e con base nas estimacións dos parámetros, arredondadas ás milésimas, para un recentemente nado, nesta maternidade, cuxo diámetro biparietal na trixésimo cuarta semana de embarazo fose de 8,50 cm, estímase que o perímetro cefálico ao nacer sexa, aproximadamente, IV cm.

I	II	III	IV
a) 0,04	a) 2,58	a) 0,87	a) 34,54
b) 0,7	b) 3,64	b) 0,94	b) 36,11
c) 1,75	c) 7,27	c) 3,54	c) 41,62

6. O código dunha tarxeta multibanco é unha secuencia de catro algarismos (díxitos), como, por exemplo, 1526 e 0232.

Admite que o código de calquera tarxeta multibanco se atribúe ao chou, con algarismos de 0 a 9.

Determina a probabilidade de que o código atribuído a unha tarxeta multibanco teña todos os algarismos diferentes, un dos algarismos sexa o cero e a suma dos catro algarismos sexa un número impar.

Presenta o resultado en forma de fracción irredutíbel.

7. Na Figura 1 están representados, nun referencial ortonormado Oxy , a circunferencia de centro C , definida pola ecuación $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$, o triángulo $[ABC]$ e o ángulo BAC , de amplitude α , en radiáns, con $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Sábese que:

- os puntos A e B pertencen á circunferencia;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$.

Determina, sen recorrer á calculadora, o valor exacto da lonxitude do arco AB .

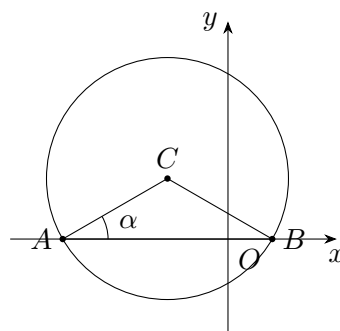


Figura 1

8. Na Figura 2 están representados, no plano complexo, os afixos de cinco números complexos.

Sábese que:

- os puntos A e C pertencen, respectivamente, ao 2.º e ao 3.º cuadrantes;
- o punto B pertence ao semieixe real negativo;
- o punto D pertence ao semieixe imaxinario negativo;
- o punto W pertence ao 1.º cuadrante e é o afixo dun número complexo w tal que $\text{Im}(w) = \text{Re}(w)$.

Cal dos puntos seguintes pode ser o afixo do número complexo $i w^3$?

- (A) Punto A
 (B) Punto B
 (C) Punto C
 (D) Punto D

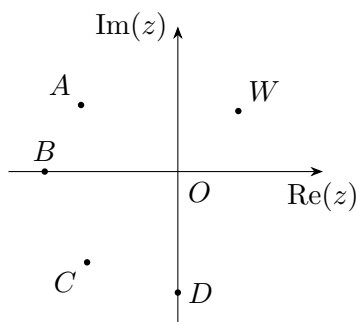


Figura 2

9. Resolve este item sen recorrer á calculadora.

Considera, en $\mathbb{C}$, conxunto dos números complexos, os números $z_1 = 2i^{19}$ e $z_2 = \frac{-3+i}{1+i}$.

Sexa $w = -\sqrt{2}k e^{i\frac{3\pi}{4}}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Determina o valor de k para o que o afixo de w é equidistante do afixo de z_1 e do afixo de z_2 .

10. Na Figura 3 está representado, nun referencial ortonormado $Oxyz$, o prisma triangular $[ABCDEF]$.

Sábese que:

- os puntos A e B teñen coordenadas $(4, 2, 0)$ e $(2, 3, -3)$, respectivamente;
- o punto C pertence ao plano mediador do segmento $[AB]$;
- a recta DF está definida pola ecuación vectorial $(x, y, z) = (-7, 4, 2) + k(1, 1, -5)$, $k \in \mathbb{R}$.

[Nota: Na Figura 3: prisma triangular $[ABCDEF]$ debuxado en perspectiva no referencial $Oxyz$, cos vértices A, B, C, D, E, F rotulados; toda a información numérica necesaria está no texto.]

10.1. Cal das ecuacións seguintes define unha recta perpendicular á recta DF e que pasa polo punto A ?

- (A) $(x, y, z) = (-1, 2, 1) + k(5, 0, -1)$, $k \in \mathbb{R}$
- (B) $(x, y, z) = (4, -3, -1) + k(0, 5, 1)$, $k \in \mathbb{R}$
- (C) $(x, y, z) = (-6, 2, 2) + k(5, 0, -1)$, $k \in \mathbb{R}$
- (D) $(x, y, z) = (4, 8, -2) + k(0, 5, 1)$, $k \in \mathbb{R}$

10.2. Resolve este item sen recorrer á calculadora.

Determina as coordenadas do punto C .

11. Nunha certa rexión localizouse un enxame de saltóns.

Admite que o número, G , en millóns, de saltóns do enxame, x semanas despois das cero horas do día en que este foi localizado, vén dado, aproximadamente, por

$$G(x) = 0,9 e^{-0,6x} (x + 0,5)^3, \quad \text{con } x \geq 0.$$

De acordo co modelo, existe un único instante a partir do cal, pasadas catro semanas, o número de saltóns quedou reducido á metade do número de saltóns existentes nese instante.

Determina, recorrendo á calculadora, cantos días transcorreron desde as cero horas do día en que o enxame foi localizado ata ese instante.

Presenta o resultado arredondado ás unidades.

Non xustifiques a validez do resultado obtido na calculadora.

Na túa resposta:

- presenta unha ecuación que che permita resolver o problema;
- representa, nun referencial cartesiano, a(s) gráfica(s) da(s) función(s) visualizada(s) na calculadora e sinala o(s) punto(s) relevante(s) que che permiten resolver a ecuación;
- presenta a(s) coordenada(s) relevante(s) dese(s) punto(s), arredondada(s) ás centésimas.

12. Considera a función f , de dominio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3e^x - 2e^{-x}$.

Resolve os itens 12.1. e 12.2. sen recorrer á calculadora, agás en eventuais cálculos numéricos.

12.1. Considera, nun referencial ortonormado Oxy , a representación gráfica da función f e o trapecio $[OCAB]$, tales que:

- o punto A é o punto de intersección da gráfica da función f coa recta de ecuación $y = 5$;
- o punto B pertence á gráfica da función f e ao eixe Oy ;
- o punto C pertence ao eixe Ox e ten abscisa igual á abscisa do punto A .

Determina a área do trapecio $[OCAB]$.

Presenta o resultado na forma $\ln(a)$, con $a > 0$.

12.2. Demostra, recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, que a gráfica da función f corta a recta de ecuación $y = 3x + 4$ en, polo menos, un punto de abscisa pertencente ao intervalo $]0, 1[$.

13. Considera unha función, f , de dominio $\mathbb{R}$, derivábel en $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Sábese que:

- a función f é crecente en $]-\infty, 1[$ e en $]1, +\infty[$;
- a recta de ecuación $x = 1$ é asíntota da gráfica da función f .

Considera as proposicións seguintes.

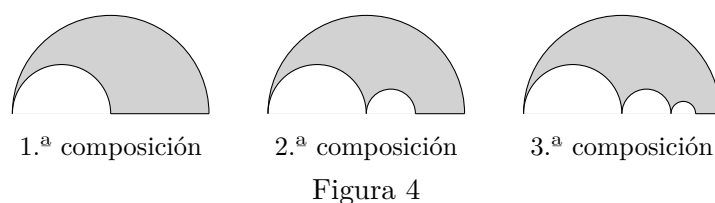
- I. A función f é continua en $x = 1$.
- II. A recta de ecuación $y = -x + 2$ é tanxente á gráfica da función f nun punto de abscisa diferente de 1.

Xustifica que as proposicións I e II son falsas.

Na túa resposta, presenta, para cada unha das proposicións, unha razón que xustifique a súa falsidade.

14. Considera unha sucesión de composicións xeométricas, construídas a partir dun semicírculo de raio 1.

Na Figura 4 están representadas as tres primeiras composicións desa sucesión.



[Nota: Na Figura 4, a rexión sombreada é cada composición.]

Tal como se ilustra na Figura 4:

- a 1.ª composición obtívose retirando ao semicírculo inicial un semicírculo contido nel, de raio $\frac{1}{2}$;
- a 2.ª composición obtívose retirando á 1.ª composición un semicírculo contido nela, de raio $\frac{1}{4}$;
- a 3.ª composición obtívose retirando á 2.ª composición un semicírculo contido nela, de raio $\frac{1}{8}$;
- e así sucesivamente, retirando, en cada composición, un semicírculo contido na composición anterior, coa metade do raio do semicírculo retirado nesa composición, de modo que o diámetro de cada semicírculo retirado sexa colinear co diámetro do semicírculo inicial.

Determina o perímetro da 20.ª composición xeométrica desta sucesión.

Presenta o resultado arredondado ás centésimas.

15. Sexan a , b e c números reais non nulos, e sexa f a función, de dominio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^3 + bx + c$.

Sexa r unha recta que corta a gráfica da función f no punto de abscisa cero.

Demosta que, se a recta r corta a gráfica da función f noutros dous puntos distintos, entón eses puntos teñen abscisas simétricas.

FIN

Puntuacións

Item	1.	2.1.	2.2.	3.	5.	6.	8.	10.1.	10.2.	11.	13.	15.	Subtotal
Puntos	12	14	14	12	12	14	12	12	14	14	14	14	158

As puntuacións obtidas nas respostas a estes 12 itens contribúen obrigatoriamente para a cualificación final.

Item	4.	7.	9.	12.1.	12.2.	14.	Subtotal
Puntos			3×14	puntos			42

Destes 6 itens, contribúen para a cualificación final da proba os 3 itens cuxas respostas obteñan mellor puntuación.

TOTAL: 200 puntos

Solucións

Exercicio 1. $(1 + \frac{1}{n})^{3n} = [(1 + \frac{1}{n})^n]^3 \rightarrow e^3$, polo límite notábel do formulario e a continuidade de $t \mapsto t^3$. **Resposta: (C)** e^3 .

Exercicio 2. **2.1.** $g(0) = 2 \sin^2 0 - 0 + 2 = 2$, e $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 2$ por continuidade da segunda expresión. Pola esquerda, multiplicando polo conxugado,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{1 - \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x (1 + \sqrt{1-x})}{1 - (1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + \sqrt{1-x}) = 1 \cdot 2 = 2.$$

Como os límites laterais coinciden con $g(0)$, g é continua en $x = 0$.

2.2. En $]0, \pi[$: $g'(x) = 4 \sin x \cos x - \sqrt{3} = 2 \sin(2x) - \sqrt{3}$. $g'(x) = 0 \iff \sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, con $2x \in]0, 2\pi[$, logo $2x = \frac{\pi}{3}$ ou $2x = \frac{2\pi}{3}$, é dicir, $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{\pi}{3}$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	π
g'	+	0	-	0
g	$\nearrow$	máx.	$\searrow$	mín.
				$\nearrow$ máx.

g é crecente en $]0, \frac{\pi}{6}]$ e en $[\frac{\pi}{3}, \pi]$, e decrecente en $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$. **Máximos relativos** en $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \pi$; **mínimo relativo** en $x = \frac{\pi}{3}$ (valores: $g(\frac{\pi}{6}) = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{3}\pi}{6}$, $g(\frac{\pi}{3}) = \frac{7}{2} - \frac{\sqrt{3}\pi}{3}$, $g(\pi) = 2 - \sqrt{3}\pi$).

Exercicio 3. Na liña n o segundo e o penúltimo elementos valen ${}^nC_1 = {}^nC_{n-1} = n$, logo $n^2 = 625$ e $n = 25$. A liña anterior é a liña 24, e o seu quinto elemento é ${}^{24}C_4 = 10\,626$. **Resposta: (A)**.

Exercicio 4. Sexan B : «inscrito en ballet clásico», D : «inscrito en danza contemporánea». Datos: $P(B) = 0,6$, $P(D \cap \overline{B}) = 0,25$, $P(D \cap B) = \frac{1}{2}P(D)$. Como $P(D) = P(D \cap B) + P(D \cap \overline{B})$, resulta $P(D \cap B) = 0,25$ e $P(D) = 0,5$. Entón

$$P(B | \overline{D}) = \frac{P(B) - P(B \cap D)}{1 - P(D)} = \frac{0,6 - 0,25}{0,5} = \boxed{0,7}.$$

Exercicio 5. Coa calculadora: mediana de x : $\frac{8,30+8,66}{2} = 8,48$; media $\bar{x} = 8,43875 \approx 8,44$; diferenza 0,04. Amplitude de y : $37,63 - 30,36 = 7,27$. Coeficiente de correlación: $r \approx 0,9354 \approx 0,94$. Recta de regresión: $y = 3,536x + 4,480$; para $x = 8,50$: $y \approx 3,536 \cdot 8,5 + 4,480 = 34,536 \approx 34,54$. **Resposta: I – a); II – c); III – b); IV – a).**

Exercicio 6. Casos posíbeis: 10^4 . Casos favorábeis: o código contén o 0 e outros tres algarismos distintos de $\{1, \dots, 9\}$ (5 impares, 4 pares) con suma impar: tres impares (${}^5C_3 = 10$) ou un impar e dous pares ($5 \cdot {}^4C_2 = 30$), é dicir, 40 conxuntos; cada un ordénase de $4! = 24$ maneiras. Favorábeis: $40 \cdot 24 = 960$.

$$P = \frac{960}{10\,000} = \boxed{\frac{12}{125}}.$$

Exercicio 7. O centro é $C(-1, 1)$ e o raio 2, logo $\overline{CA} = \overline{CB} = 2$. O triángulo $[ABC]$ é isósceles, polo que o pé da altura desde C é o punto medio de $[AB]$ e $\overline{AB} = 2 \cdot 2 \cos \alpha = 4 \cos \alpha$. Así

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cos \alpha = 8 \cos^2 \alpha = 6 \iff \cos^2 \alpha = \frac{3}{4} \iff \alpha = \frac{\pi}{6} \quad (\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[).$$

O ángulo ao centro é $\widehat{ACB} = \pi - 2\alpha = \frac{2\pi}{3}$, e a lonxitude do arco é $\boxed{\frac{2\pi}{3} \cdot 2 = \frac{4\pi}{3}}$.

Exercicio 8. Como $\text{Im } w = \text{Re } w > 0$, $w = \rho e^{i\pi/4}$ con $\rho > 0$. Entón $iw^3 = e^{i\pi/2} \rho^3 e^{i3\pi/4} = \rho^3 e^{i5\pi/4}$, cuxo afixo está no 3.º cuadrante (na bisectriz). **Resposta: (C)** punto C .

Exercicio 9. $i^{19} = i^{16} i^3 = -i$, logo $z_1 = -2i$. $z_2 = \frac{(-3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2+4i}{2} = -1+2i$.
 $w = -\sqrt{2}k \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = k - ki$.

$$|w - z_1|^2 = |w - z_2|^2 \iff k^2 + (2-k)^2 = (k+1)^2 + (k+2)^2 \iff 4-4k = 6k+5 \iff \boxed{k = -\frac{1}{10}}.$$

Exercicio 10. 10.1. O vector director de DF é $\vec{u} = (1, 1, -5)$. Para $(5, 0, -1)$: $\vec{u} \cdot (5, 0, -1) = 10 \neq 0$ (descártanse A e C). Para $(0, 5, 1)$: $\vec{u} \cdot (0, 5, 1) = 0$. En B, con $k = 1$: $(4, -3, -1) + (0, 5, 1) = (4, 2, 0) = A$; en D, a terceira coordenada obriga a $k = 2$, que dá $(4, 18, 0) \neq A$. **Resposta: (B)**.

10.2. No prisma, $[DF]$ é a aresta da base $[DEF]$ correspondente a $[AC]$, logo $AC \parallel DF$ e $C = (4+t, 2+t, -5t)$ para algún $t \in \mathbb{R}$. Plano mediador de $[AB]$: $(x-4)^2 + (y-2)^2 + z^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 \iff -2x + y - 3z - 1 = 0$. Substituíndo: $-2(4+t) + (2+t) + 15t - 1 = 0 \iff 14t = 7 \iff t = \frac{1}{2}$.

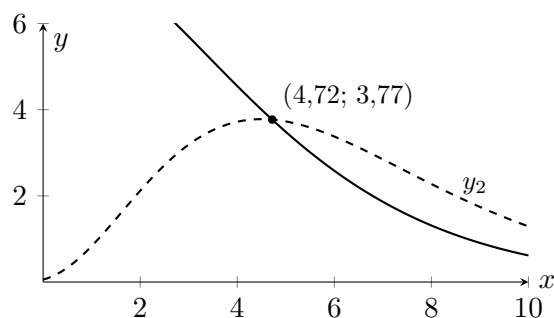
$$\boxed{C \left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2} \right)}.$$

(O punto $(-7, 4, 2)$ da recta DF non intervéñ; por iso a dúbida sobre os seus signos non afecta ao resultado.)

Exercicio 11. Pídese $x \geq 0$ tal que $G(x+4) = \frac{1}{2}G(x)$, é dicir,

$$0,9 e^{-0,6(x+4)}(x+4,5)^3 = 0,45 e^{-0,6x}(x+0,5)^3.$$

Na calculadora represéntanse $y_1 = G(x+4)$ e $y_2 = \frac{G(x)}{2}$ (por exemplo na xanela $[0, 10] \times [0, 5]$) e determínase o punto de intersección: $(4,72; 3,77)$. Entón $x \approx 4,719$ semanas, e $4,719 \times 7 \approx 33,03$ días: transcorreron 33 días.



Exercicio 12. **12.1.** $f(x) = 5 \iff 3e^{2x} - 5e^x - 2 = 0 \iff e^x = 2$ ou $e^x = -\frac{1}{3}$ (imposíbel), logo $x = \ln 2$ e $A(\ln 2, 5)$. $B(0, f(0)) = (0, 1)$, $C(\ln 2, 0)$. As bases do trapezio son $\overline{OB} = 1$ e $\overline{CA} = 5$ e a altura $\overline{OC} = \ln 2$:

$$\text{Área} = \frac{1+5}{2} \ln 2 = 3 \ln 2 = \boxed{\ln 8}.$$

12.2. Sexa $h(x) = f(x) - 3x - 4 = 3e^x - 2e^{-x} - 3x - 4$, continua en $[0, 1]$ por ser suma de funcións continuas. $h(0) = 3 - 2 - 4 = -3 < 0$ e $h(1) = 3e - \frac{2}{e} - 7 \approx 0,42 > 0$. Polo teorema de Bolzano-Cauchy existe $c \in]0, 1[$ con $h(c) = 0$, isto é, $f(c) = 3c + 4$: a gráfica de f corta a recta $y = 3x + 4$ nun punto de abscisa en $]0, 1[$. ■

Exercicio 13. **I é falsa:** se f fose continua en 1, sería $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \in \mathbb{R}$, polo que a recta $x = 1$ non podería ser asíntota vertical (que esixe un límite lateral infinito en 1).

II é falsa: f é derivábel e crecente en cada un dos intervalos $] -\infty, 1[$ e $]1, +\infty[$, logo $f'(x) \geq 0$ para todo $x \neq 1$. Se $y = -x + 2$ fose tanxente nun punto de abscisa $a \neq 1$, sería $f'(a) = -1 < 0$, contradición.

Exercicio 14. Na composición n retiráronse semicírculos de raios $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}$, cuxos diámetros, consecutivos sobre o diámetro inicial, suman $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$. O perímetro está formado polo arco inicial (π), polos arcos dos semicírculos retirados e polo anaco de diámetro que queda, de lonxitude $2 - (2 - \frac{1}{2^{n-1}}) = \frac{1}{2^{n-1}}$:

$$P_n = \pi + \pi \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) + \frac{1}{2^{n-1}} = \pi + \pi \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

(Comprobación: $P_1 = \frac{3\pi}{2} + 1$, coma na figura.) Para $n = 20$: $P_{20} = 2\pi - \frac{\pi}{2^{20}} + \frac{1}{2^{19}} \approx \boxed{6,28}$.

Exercicio 15. O punto da gráfica de abscisa 0 é $(0, c)$. A recta r non é vertical (unha recta vertical corta a gráfica dunha función nun só punto), logo $r : y = mx + c$ para algún $m \in \mathbb{R}$. As abscisas dos puntos de corte son as solucións de

$$ax^3 + bx + c = mx + c \iff x(ax^2 + b - m) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x^2 = \frac{m-b}{a} \quad (a \neq 0).$$

Se r corta a gráfica noutros dous puntos distintos, a ecuación $x^2 = \frac{m-b}{a}$ ten dúas solucións distintas e non nulas, que son necesariamente $x = \sqrt{\frac{m-b}{a}}$ e $x = -\sqrt{\frac{m-b}{a}}$, isto é, abscisas simétricas. ■

15 Francia

PISA 2025, matemáticas: 458 puntos

Dificultade relativa estimada: 4/10 (posto 21 dos 25 exames analizados; PAU de Galiza = 5)

Exame: Baccalauréat général — proba de ensino de especialidade Matemáticas (Francia metropolitana, día 1)

Nome orixinal: Baccalauréat général, Épreuve d'enseignement de spécialité, Mathématiques (Métropole, Jour 1)

Ano e convocatoria: sesión 2026, convocatoria principal (16 de xuño de 2026)

Duración: 4 horas **Calculadora:** permitida a calculadora co modo exame activo e a calculadora sen memoria «tipo colexio»

Estrutura e cualificación: 4 exercicios independentes obrigatorios ($5 + 4 + 6 + 5 = 20$ puntos); o suxeito ten 8 páxinas.

Contexto: A matemática é unha das dúas «especialidades» que o alumnado da vía xeral cursa en Terminale; a proba escrita ten coeficiente 16 sobre 100 no Bac. O acceso á universidade xestiónase pola plataforma Parcoursup (expediente de Première e Terminale), polo que o Bac funciona sobre todo como título que valida o acceso. Hai dous suxeitos distintos en días consecutivos (16 e 17 de xuño); tradúcese o do primeiro día.

Fonte: <https://www.sujetdebac.fr/Annales-pdf/2026/spe-mathematiques-2026-metropole-1-sujet-officiel.pdf>

Instrucións

Baccalauréat xeral. Proba de ensino de especialidade. Sesión 2026. Matemáticas. Duración da proba: 4 horas.

Permítese o uso da calculadora co modo exame activo. Permítese o uso da calculadora sen memoria «tipo colexio».

Este suxeito consta de 8 páxinas numeradas do 1 ao 8. O candidato debe tratar os catro exercicios propostos.

Invítase o candidato a deixar constancia na folla de resposta de calquera intento de investigación, aínda que estea incompleto ou non dese froito.

Enunciados

Exercicio 1

(5 puntos)

Un barco cobre a liña entre dous portos do Mediterráneo. Durante unha travesía, unha familia ten a posibilidade de reservar un camarote e tamén unha praza para un vehículo.

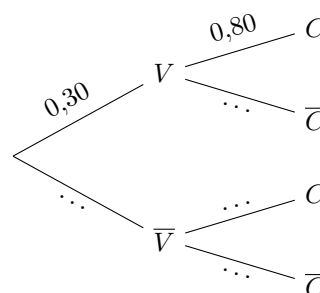
Parte A

Entre o conxunto das familias que fan a travesía, conséntase que o 30 % reservan unha praza para un vehículo e, entre estas últimas, o 80 % reservan un camarote. Sábese ademais que o 75 % das familias que fan a travesía reservan un camarote.

Escóllese ao chou unha familia que fai a travesía e considéranse os sucesos seguintes:

- V : «a familia reserva unha praza para un vehículo»;
- C : «a familia reserva un camarote».

1. a. Dá $P(C)$.
b. Reproduce a árbore da dereita e completa os catro espazos de puntos.
2. Calcula a probabilidade de que unha familia reserve unha praza para un vehículo e un camarote.
3. Unha familia reservou un camarote. Determina a probabilidade de que reserve unha praza para un vehículo.
4. Determina $P_{\bar{V}}(C)$. Arredondarase o resultado a 10^{-2} . Interpreta o resultado no contexto do exercicio.



Parte B

Neste traxecto, a reserva dun camarote e dunha praza para un vehículo factúranse como suplemento ao custo da travesía. Estes suplementos teñen un importe de:

- 100 € por un camarote;
- 70 € pola praza dun vehículo.

Denotamos por X a variábel aleatoria que asocia, a cada familia que fai a travesía, o prezo que paga, en euros, polos suplementos.

Dáse a continuación a lei de probabilidade de X .

x_i	0	70	100	170
$P(X = x_i)$	0,19	0,06	0,51	0,24

1. Xustifica que $E(X) = 96$ e que $V(X) = 3114$.

A estes suplementos pódeseles engadir o prezo pagado por extras (comidas, bebidas, etc.). Denotamos por Y a variábel aleatoria que asocia, a cada familia que fai a travesía, o prezo que paga, en euros, polos extras. Admítase que a variábel aleatoria Y ten esperanza $E(Y) = 104$ e varianza $V(Y) = 1686$. Suponse que as variábeis X e Y son independentes.

De xeito excepcional, a compañía propón unha redución do 40 % nos suplementos e nos extras. Denotamos por Z a variábel aleatoria que, a cada familia que fai a travesía, asocia o importe total polos suplementos e os extras, en euros, pagado por esa familia despois da redución.

2. a. Xustifica que $Z = 0,6(X + Y)$.
b. Deduce que $E(Z) = 120$ e que $V(Z) = 1728$.

Sexa n un enteiro natural non nulo; escólese ao chou unha mostra de n familias que fan esta travesía e que se benefician da redución excepcional definida na pregunta 2.

Designamos por Z_1 a variábel aleatoria igual ao prezo total polos suplementos e os extras pagado pola primeira familia, por Z_2 a variábel aleatoria igual ao prezo total polos suplementos e os extras pagado pola segunda familia, e así sucesivamente... Admítase que as variábeis $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ son independentes e seguen a mesma lei de probabilidade que a variábel aleatoria Z .

Considérase a variábel aleatoria

$$M_n = \frac{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n}{n},$$

que dá o prezo total medio polos suplementos e os extras.

3. a. Demostra que a esperanza $E(M_n)$ da variábel M_n é igual a 120 e que a súa varianza $V(M_n)$ é igual a $\frac{1728}{n}$.
- b. Determina o menor enteiro n para o cal a desigualdade de Bienaymé-Chebyshev permite afirmar que

$$P(114 < M_n < 126) \geq 0,85.$$

Interpreta o resultado no contexto do exercicio.

Exercicio 2

(4 puntos)

Para cada unha das afirmacións seguintes, indica se é verdadeira ou falsa. Xustifica cada resposta. Unha resposta non xustificada non dá ningún punto.

1. O espazo está dotado dun sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Considéranse:

- a recta (d) da que unha representación paramétrica é $\begin{cases} x = t \\ y = -1,5 - t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$ onde $t \in \mathbb{R}$;
- os puntos $A(3; 0; 2)$ e $B(2; 1; -3)$;
- o plano (P) de ecuación cartesiana $-x + y - 5z - 0,5 = 0$.

Afirmación 1: O plano (P) é ortogonal á recta (AB) e pasa polo punto medio do segmento $[AB]$.

Afirmación 2: As rectas (d) e (AB) son secantes.

Considérase o punto C de coordenadas $(1,5; -3; -1)$.

Afirmación 3: A medida do ángulo $\widehat{ACB}$, arredondada a 10^{-1} , é igual a $70,5^\circ$.

2. Titouan e Clotilde participan nun *escape game*. Atópanse nunha sala que ten dúas portas de saída, A e B, cada unha protexida por un teclado de código (*digicode*) equipado con 8 teclas que levan símbolos diferentes:

- o teclado da porta A usa un código de 3 símbolos diferentes que se deben introducir na orde correcta;
- o da porta B usa un código de 4 símbolos diferentes que se poden introducir en calquera orde.

Como non conseguiron obter pistas, deciden introducir os códigos ao chou. Clotilde escolle un código para a porta A e Titouan escolle un código para a porta B. Considérase que as escollas dos códigos son equiprobábeis.

Afirmación 4: Titouan ten máis probabilidades de abrir a súa porta ca Clotilde.

Exercicio 3

(6 puntos)

Estúdase o funcionamento dun sistema de calefacción instalado nun cuarto. Este sistema acéndese automaticamente en canto a temperatura do cuarto é inferior ou igual a 18°C (graos Celsius), e apágase cando esta acada os 20°C .

Parte A: Fase de quecemento

Para unha temperatura do cuarto que varía de 18°C a 20°C , o sistema de calefacción funciona de maneira continua. A temperatura do cuarto aumenta progresivamente.

Nesta parte, modelízase a temperatura do cuarto, en graos Celsius, no instante t , expresado en decenas de minutos, mediante unha función T definida en $[0; +\infty[$. Admítese que a función T é

derivábel en $[0; +\infty[$ e solución da ecuación diferencial

$$(E) : y' = -0,035 y + 0,91.$$

Suponse que ao comezo do estudo a temperatura do cuarto é de 18°C . Así, $T(0) = 18$.

1. Dá as solucións da ecuación diferencial (E) en $[0; +\infty[$.
2. Deduce que para todo número real t pertencente ao intervalo $[0; +\infty[$ se ten:

$$T(t) = 26 - 8e^{-0,035t}.$$

3. Segundo este modelo, determina ao cabo de canto tempo o cuarto acadará a temperatura de 20°C . Expresarase o resultado en horas e minutos, arredondado ao minuto.
4. Se unha avaría do sistema de calefacción lle impide apagarse cando a temperatura do cuarto acada os 20°C , poderá a temperatura do cuarto superar os 28°C segundo este modelo?

Parte B: Fase de arrefriamento

Cando o cuarto acada a temperatura de 20°C , o sistema de calefacción apágase e o cuarto arrefría. Modelízase a temperatura do cuarto mediante a sucesión (u_n) definida por $u_0 = 20$ e, para todo enteiro natural n :

$$u_{n+1} = 0,965 u_n + 0,35 + 0,07 e^{-0,1n},$$

onde n é un número enteiro que expresa o tempo transcorrido en decenas de minutos.

1. Demostra que $u_1 = 19,72$.
2. Demostra por indución que, para todo enteiro natural n , se ten $u_n > 10$.
Admítese que a sucesión (u_n) é decrecente.
3. Deduce que a sucesión (u_n) é converxente.
4. Denotamos por ℓ o límite da sucesión (u_n) .
 - a. Xustifica que este límite é solución da ecuación $x = 0,965 x + 0,35$.
 - b. Determina ℓ e interpreta o resultado.
5. Lémbrese que o sistema de calefacción se pon en marcha automaticamente en canto a temperatura do cuarto é inferior ou igual a 18°C .
 - a. Copia e completa as liñas 4, 5 e 6 do programa escrito en linguaxe Python que aparece a continuación, para que devolva o número de decenas de minutos a partir do cal o sistema de calefacción se volverá poñer en marcha.

```

1  def marche() :
2      n = 0
3      u = 20
4      while ... :
5          u = ...
6          n = ...
7      return n

```

- b. Determina o tempo, en decenas de minutos, a partir do cal o sistema de calefacción se volverá poñer en marcha.

[Nota: Python: *marche* = «marcha, funcionamento».]

Exercicio 4**(5 puntos)**

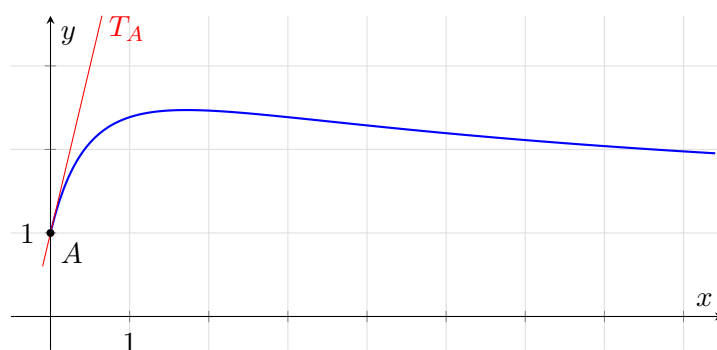
Considérase a función f definida no intervalo $] - 1; +\infty[$ por:

$$f(x) = a + b \frac{\ln(x+1)}{x+1},$$

onde a e b son números reais e $\ln$ designa a función logaritmo neperiano. Admítese que a función f é dúas veces derivábel en $] - 1; +\infty[$. Denotamos por f' a súa derivada e por f'' a súa derivada segunda.

Parte A

O obxectivo desta parte é determinar os valores de a e b de maneira que a curva representativa da función f en $[0; +\infty[$ sexa a trazada no sistema de referencia ortonormal seguinte. A recta T_A é a tanxente á curva no punto $A(0; 1)$.



1. Xustifica que $a = 1$.
2. Usando a gráfica:
 - a. Dá o valor de $f'(0)$. Xustifica.
 - b. Dá o signo de $f''(1)$. Xustifica.
3. a. Demostra que para todo real x pertencente a $] - 1; +\infty[$ se ten:

$$f'(x) = \frac{b(1 - \ln(x+1))}{(x+1)^2}.$$

- b. Deduce o valor de b .

Parte B

Admítese no resto do exercicio que a función f está definida en $] - 1; +\infty[$ por:

$$f(x) = 1 + \frac{4 \ln(x+1)}{x+1}.$$

1. Xustifica que a recta de ecuación $y = 1$ é asíntota á curva representativa da función f .
2. Resolve a inecuación $1 - \ln(x+1) > 0$ en $] - 1; +\infty[$.
3. Elabora a táboa de variación completa da función f indicando o valor exacto do seu extremo.
4. Demostra que a ecuación $f(x) = 1,5$ ten unha única solución no intervalo $[2; +\infty[$. Dá un valor arredondado a 10^{-1} dela.

5. a. Demuestra que:

$$\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx = \frac{1}{2}(\ln 3)^2.$$

- b. Deduce a área, en unidades de área, do recinto delimitado polo eixe de abscisas, a curva representativa da función f , o eixe de ordenadas e a recta de ecuación $x = 2$.

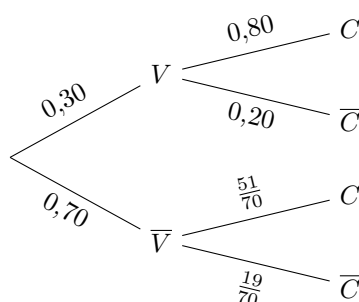
Solucións

Exercicio 1. Parte A

1. a) Polo enunciado, $P(C) = 0,75$.

b) $P(\bar{V}) = 1 - 0,30 = 0,70$ e $P_V(\bar{C}) = 1 - 0,80 = 0,20$. As outras dúas ramas obtéñense da fórmula das probabilidades totais: $P(V \cap C) = 0,30 \cdot 0,80 = 0,24$, logo $P(\bar{V} \cap C) = 0,75 - 0,24 = 0,51$ e

$$P_{\bar{V}}(C) = \frac{0,51}{0,70} = \frac{51}{70} \approx 0,73, \quad P_{\bar{V}}(\bar{C}) = \frac{19}{70} \approx 0,27.$$



2. $P(V \cap C) = P(V) P_V(C) = 0,30 \cdot 0,80 = 0,24$.

3. $P_C(V) = \frac{P(V \cap C)}{P(C)} = \frac{0,24}{0,75} = 0,32$.

4. Pola fórmula das probabilidades totais, $P(C) = P(V \cap C) + P(\bar{V} \cap C)$, así que $P(\bar{V} \cap C) = 0,51$ e

$$P_{\bar{V}}(C) = \frac{0,51}{0,70} = \frac{51}{70} \approx 0,73.$$

Interpretación: entre as familias que non reservan praza para vehículo, aproximadamente o 73 % reservan un camarote.

Parte B

1. $E(X) = 0 \cdot 0,19 + 70 \cdot 0,06 + 100 \cdot 0,51 + 170 \cdot 0,24 = 4,2 + 51 + 40,8 = 96$.

$E(X^2) = 4900 \cdot 0,06 + 10000 \cdot 0,51 + 28900 \cdot 0,24 = 294 + 5100 + 6936 = 12330$, logo $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 12330 - 9216 = 3114$.

(A lei é coherente coa parte A: $P(X = 170) = P(V \cap C) = 0,24$, $P(X = 100) = P(\bar{V} \cap C) = 0,51$, $P(X = 70) = P(V \cap \bar{C}) = 0,06$, $P(X = 0) = 0,19$.)

2. a) O importe sen redución é $X + Y$; unha redución do 40 % sobre suplementos e extras multiplica cada importe por $1 - 0,40 = 0,6$, logo $Z = 0,6X + 0,6Y = 0,6(X + Y)$.

b) Pola linearidade da esperanza, $E(Z) = 0,6(E(X) + E(Y)) = 0,6 \cdot (96 + 104) = 120$. Como X e Y son independentes, $V(X + Y) = V(X) + V(Y) = 4800$, e $V(Z) = 0,6^2 \cdot 4800 = 0,36 \cdot 4800 = 1728$.

3. a) Pola linearidade, $E(M_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(Z_i) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot 120 = 120$. Como as Z_i son independentes,

$$V(M_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(Z_i) = \frac{n \cdot 1728}{n^2} = \frac{1728}{n}.$$

b) $\{114 < M_n < 126\} = \{|M_n - 120| < 6\}$, suceso contrario de $\{|M_n - 120| \geq 6\}$. Pola desigualdade de Bienaymé-Chebyshev,

$$P(|M_n - 120| \geq 6) \leq \frac{V(M_n)}{6^2} = \frac{1728}{36n} = \frac{48}{n}, \quad \text{logo} \quad P(114 < M_n < 126) \geq 1 - \frac{48}{n}.$$

Abonda $1 - \frac{48}{n} \geq 0,85 \iff \frac{48}{n} \leq 0,15 \iff n \geq 320$. O menor enteiro é $\boxed{n = 320}$. Interpretación: nunha mostra de polo menos 320 familias, a probabilidade de que o prezo medio pagado por suplementos e extras estea estritamente entre 114 € e 126 € é polo menos 0,85.

Exercicio 2. Afirmación 1: VERDADEIRA. $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; -5)$ coincide cun vector normal de (P) , $\vec{n} = (-1; 1; -5)$, logo $(P) \perp (AB)$. O punto medio de $[AB]$ é $I(2,5; 0,5; -0,5)$ e $-2,5 + 0,5 - 5 \cdot (-0,5) - 0,5 = 0$, logo $I \in (P)$. ((P) é o plano mediador de $[AB]$.)

Afirmación 2: FALSA. Unha representación paramétrica de (AB) é $x = 3 - s$, $y = s$, $z = 2 - 5s$ ($s \in \mathbb{R}$). Un punto común exixiría

$$t = 3 - s, \quad -1,5 - t = s, \quad 2 - 2t = 2 - 5s.$$

Substituíndo a primeira na segunda: $-1,5 - 3 + s = s$, é dicir, $-4,5 = 0$, absurdo. As rectas non teñen ningún punto común; como ademais os vectores directores $(1; -1; -2)$ e $(-1; 1; -5)$ non son colineares, as rectas non son paralelas: son non coplanarias (crúzanse).

Afirmación 3: VERDADEIRA. $\overrightarrow{CA} = (1,5; 3; 3)$, $\overrightarrow{CB} = (0,5; 4; -2)$, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0,75 + 12 - 6 = 6,75$, $CA = CB = \sqrt{20,25} = 4,5$. Así

$$\cos \widehat{ACB} = \frac{6,75}{4,5 \cdot 4,5} = \frac{1}{3}, \quad \widehat{ACB} = \arccos \frac{1}{3} \approx 70,53^\circ \approx 70,5^\circ.$$

Afirmación 4: VERDADEIRA. Porta A: códigos = arranxos de 3 símbolos distintos entre 8, $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$; probabilidade de Clotilde $\frac{1}{336}$. Porta B: a orde non importa, códigos = combinacións $\binom{8}{4} = 70$; probabilidade de Titouan $\frac{1}{70}$. Como $\frac{1}{70} > \frac{1}{336}$, Titouan ten máis probabilidades de abrir a súa porta.

Exercicio 3. Parte A

1. (E) é da forma $y' = ay + b$ con $a = -0,035$, $b = 0,91$; a solución constante é $-\frac{b}{a} = \frac{0,91}{0,035} = 26$. As solucións son

$$\boxed{y(t) = K e^{-0,035t} + 26, \quad K \in \mathbb{R}.}$$

2. $T(0) = K + 26 = 18 \Rightarrow K = -8$, logo $T(t) = 26 - 8 e^{-0,035t}$.

3. $T(t) = 20 \iff e^{-0,035t} = \frac{3}{4} \iff t = \frac{\ln(4/3)}{0,035} \approx 8,2195$ decenas de minutos, é dicir, $\approx 82,2$ minutos: o cuarto acada os 20°C ao cabo de $\boxed{1 \text{ h } 22 \text{ min}}$.

4. $T'(t) = 0,28 e^{-0,035t} > 0$, logo T é crecente, e $T(t) = 26 - 8 e^{-0,035t} < 26$ para todo t (con $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = 26$). Polo tanto a temperatura nunca supera os 26°C e, **non**, non pode superar os 28°C .

Parte B

1. $u_1 = 0,965 \cdot 20 + 0,35 + 0,07 e^0 = 19,3 + 0,35 + 0,07 = 19,72$.

2. Sexa $\mathcal{P}(n)$: « $u_n > 10$ ». Inicio: $u_0 = 20 > 10$. Herdanza: se $u_n > 10$, entón $0,965 u_n > 9,65$, e como $0,07 e^{-0,1n} > 0$,

$$u_{n+1} > 9,65 + 0,35 + 0 = 10.$$

Logo $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ e, por indución, $u_n > 10$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. A sucesión é decrecente e está minorada por 10; polo teorema da converxencia monótona, é converxente.

4. a) Como $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-0,1n} = 0$, pasando ao límite na relación de recorrencia (as dúas sucesións (u_{n+1}) e (u_n) tenden a ℓ): $\ell = 0,965 \ell + 0,35 + 0$, isto é, ℓ é solución de $x = 0,965x + 0,35$.

b) $0,035 \ell = 0,35 \Rightarrow \boxed{\ell = 10}$. Interpretación: se non se acendese a calefacción, a temperatura do cuarto tendería a 10°C (temperatura de equilibrio do modelo).

5. a) Liñas completadas (coa importación `from math import exp`):

```

4      while u > 18 :
5          u = 0.965*u + 0.35 + 0.07*exp(-0.1*n)
6          n = n + 1

```

(A orde importa: u_{n+1} calcúlase co valor antigo de n , e despois incrementase n .)

b) Calculando: $u_6 \approx 18,38$, $u_7 \approx 18,12 > 18$, $u_8 \approx 17,87 \leq 18$. A calefacción volve acenderse ao cabo de $\boxed{8 \text{ decenas de minutos}}$ (80 minutos).

Exercicio 4. Parte A

1. $A(0;1)$ pertence á curva: $f(0) = a + b \frac{\ln 1}{1} = a = 1$.

2. a) $f'(0)$ é a pendente da tanxente T_A . Na gráfica, T_A pasa por $A(0;1)$ e polo punto $(0,5;3)$, logo $f'(0) = \frac{3-1}{0,5} = \boxed{4}$.

b) Arredor de $x = 1$ a curva é cóncava (está por debaixo das súas tanxentes, e f' decrece: a curva pasa de subir rapidamente a acadar o máximo), logo $\boxed{f''(1) < 0}$. (De feito $f''(1) = \frac{8 \ln 2 - 12}{8} \approx -0,81$.)

3. a) Con $u = \ln(x+1)$, $u' = \frac{1}{x+1}$, $v = x+1$, $v' = 1$:

$$f'(x) = b \frac{\frac{1}{x+1}(x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{b(1 - \ln(x+1))}{(x+1)^2}.$$

b) $f'(0) = b \cdot \frac{1-0}{1} = b$, e $f'(0) = 4$, logo $\boxed{b = 4}$.

Parte B

1. Con $X = x+1 \rightarrow +\infty$, $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ (crecementos comparados), logo $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$: a recta $y = 1$ é asíntota horizontal á curva en $+\infty$.

2. $1 - \ln(x+1) > 0 \iff \ln(x+1) < 1 \iff x+1 < e \iff x < e-1$. Solución: $\boxed{x \in]-1; e-1[}$.

3. $f'(x) = \frac{4(1-\ln(x+1))}{(x+1)^2}$ ten o signo de $1 - \ln(x+1)$. Límites: en -1^+ , $\ln(x+1) \rightarrow -\infty$ e $\frac{1}{x+1} \rightarrow +\infty$, logo $f(x) \rightarrow -\infty$; en $+\infty$, $f(x) \rightarrow 1$. Máximo: $f(e-1) = 1 + \frac{4}{e} = 1 + \frac{4}{e} \approx 2,47$.

x	-1	$e-1$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty$	$\nearrow 1 + \frac{4}{e}$	$\searrow 1$

4. Como $2 > e-1$, f é continua e estritamente decrecente en $[2; +\infty[$, con $f(2) = 1 + \frac{4 \ln 3}{3} \approx 2,46 > 1,5$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 < 1,5$. Polo teorema dos valores intermedios (corolario para funcións

estritamente monótonas), $f(x) = 1,5$ ten unha única solución α en $[2; +\infty[$. Como $f(25,05) \approx 1,5006 > 1,5 > f(25,15) \approx 1,4993$, $\boxed{\alpha \approx 25,1}$.

5. a) Se $u(x) = \ln(x+1)$, entón $\frac{\ln(x+1)}{x+1} = u'u$, cunha primitiva $\frac{1}{2}u^2$:

$$\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx = \left[\frac{1}{2} (\ln(x+1))^2 \right]_0^2 = \frac{1}{2} (\ln 3)^2.$$

b) En $[0; 2]$, f crece de $f(0) = 1$ ata $1 + \frac{4}{e}$ e despois decrece ata $f(2) \approx 2,46$, logo $f > 0$. A área é

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 1 dx + 4 \int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx = \boxed{2 + 2(\ln 3)^2 \approx 4,41 \text{ u.a.}}$$

16 Noruega

PISA 2025, matemáticas: 452 puntos

Dificultade relativa estimada: 5/10 (posto 12 dos 25 exames analizados; PAU de Galiza = 5)

Exame: Eksamen REA3058 Matematikk R2 (currículo LK20), Utdanningsdirektoratet (Udir)

Nome orixinal: *Eksamen, REA3058 Matematikk R2* (“Exame de Matemática R2”, versión en bokmål)

Ano e convocatoria: 2026, convocatoria de primavera (*våren 2026*), 13 de maio de 2026

Duración: 5 horas (parte sen axudas: entrégase ás 3 horas) **Calculadora:** non na Parte 1; na Parte 2 permítense todas as axudas agás internet, ferramentas de comunicación e intelixencia artificial

Estrutura e cualificación: Parte 1 (sen axudas): 8 exercicios, 30 puntos; Parte 2 (con axudas: CAS, folla de cálculo, programación, GeoGebra...): 4 exercicios, 19 puntos. Os puntos son só orientativos: a nota (1–6) fíxase cunha valoración global.

Contexto: R2 é a materia de matemáticas máis avanzada do bacharelato noruegués (Vg3, itinerario de ciencias, “realfagsmatematikk”). Non hai un exame de acceso único: a nota do exame (sorteado entre os alumnos) entra no expediente que se usa para a admisión universitaria, e R1/R2 son requisito para moitos estudos de enxeñaría e ciencias.

Fonte: Udir, enunciado reproducido en https://matematikk.net/res/eksamen/R2/LK20/R2_V26_LK20.pdf (tamén en <https://www.eksamenssett.no/matematikk/R2/2026/vår>)

Información sobre o exame

Duración: O exame dura 5 horas. A parte sen axudas e a parte con axudas repártense ao mesmo tempo. A parte sen axudas debe entregarse despois de 3 horas. Despois de 3 horas podes usar axudas. A parte con axudas debe entregarse antes de que transcorran 5 horas.

Axudas: *Parte 1:* Podes usar material de escritura e regra. *Parte 2:* Podes usar todas as axudas, con excepción de internet e doutras ferramentas que permitan a comunicación. Non tes permiso para usar intelixencia artificial como axuda durante o exame.

Procedemento: A parte sen axudas ten 8 exercicios. A parte con axudas ten 4 exercicios. Cando o enunciado non indique outra cousa, podes escoller libremente o procedemento. O uso de ferramentas dixitais como folla de cálculo, programación, representador gráfico e CAS debe documentarse.

Orientación sobre a avaliación: Os puntos son só orientativos na avaliación. A cualificación fíxase despois dunha valoración de conxunto. Os correctores avalían en que medida es capaz de:

- usar conceptos e estratexias axeitados para explorar e resolver problemas matemáticos;
- comunicar as túas propias solucións e razoamentos mediante representacións axeitadas;
- elaborar, aplicar, interpretar e valorar criticamente modelos matemáticos;
- valorar, razoar e argumentar sobre procedementos e solucións propios e alleos;
- dar conta de patróns e relacións e aplicalos en cálculos e razoamentos.

Fontes: Ver a lista de fontes ao final.

Parte 1 – Sen axudas

1. (4 puntos)
Calcula as integrais

a) $\int_0^2 (e^{2x} + x) dx$

b) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$

2. (4 puntos)

Sabes o seguinte sobre unha función f :

- A función está definida para $x > 0$.
- $f'(x) = \frac{2}{x^2}$
- A gráfica de f pasa polo punto $(2, 2)$.

a) Determina $f(x)$.

Outras dúas funcións, g e h , veñen dadas por $g(x) = x$ e $h(x) = -\frac{3}{x} + 4$ para $x > 0$.

b) Calcula a área da rexión limitada polas gráficas de g e h .

3. (4 puntos)

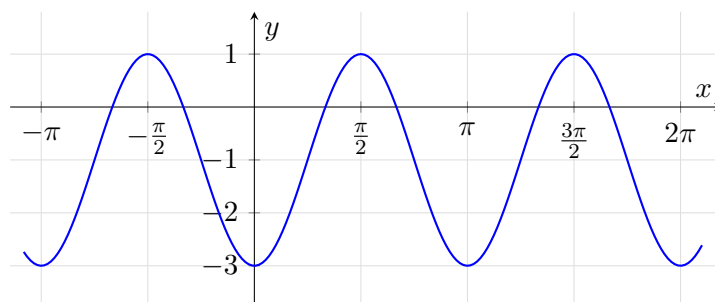
a) Determina $\sin v$ e $\tan v$ sabendo que $\cos v = \frac{2}{3}$ e que v é un ángulo do 4.º cuadrante.

b) Resolve a ecuación $2 \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) = \sqrt{3}$, $x \in \langle 0, 10 \rangle$.

[Nota: $\langle 0, 10 \rangle$ é a notación norueguesa do intervalo aberto $(0, 10)$.]

4. (2 puntos)

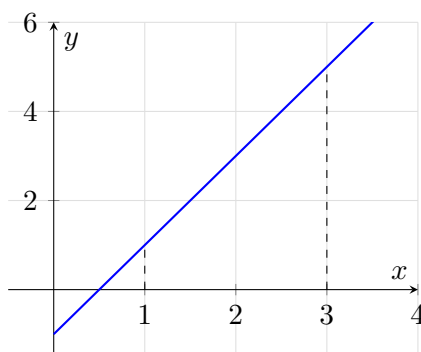
No sistema de coordenadas de embaixo ves a gráfica dunha función f . Determina unha expresión posíbel para $f(x)$.



[Nota: Na figura: función periódica con máximos de valor 1 en $x = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$ e mínimos de valor -3 en $x = 0, \pm \pi, 2\pi, \dots$ (período π).]

5. (2 puntos)

No sistema de coordenadas de arriba ves a gráfica da función f dada por $f(x) = 2x - 1$. Un corpo de revolución obtense ao facer xirar 360° arredor do eixe de abscisas a gráfica de f desde $x = 1$ ata $x = 3$. Calcula o volume do corpo de revolución.



6. (4 puntos)

Nun proxecto artístico, Selma vai construír unha torre grande poñendo táboas de madeira cadradas unhas enriba das outras. Comeza cunha táboa de lado 5 m. Cando continúa a construción, o lado de cada táboa nova debe ser 0,1 m máis curto ca o lado da táboa de debaixo.

- a) Escribe unha serie aritmética que mostre a suma dos lados das táboas da torre. Cantas táboas pode ter como máximo a torre de Selma?

Vilfred vai construír outra torre grande poñendo táboas de madeira cadradas unhas enriba das outras. Comeza cunha táboa que ten unha área de 19 m^2 . Cando continúa a construción, o lado de cada táboa nova debe ser un 10 % máis curto ca o lado da táboa de debaixo.

- b) Que tamaño pode chegar a ter a área total das táboas na torre de Vilfred?

7. (7 puntos)

Un plano α vén dado pola ecuación $2x - 5y + 4z = -4$. Os puntos $A(1, 2, 1)$, $B(2, 0, -2)$ e $C(-1, 2, 2)$ están no plano.

- a) Decide se o punto $D(3, 1, -1)$ está no plano α .
b) Usa o produto vectorial para mostrar que $[2, -5, 4]$ é un vector normal ao plano.

Unha esfera é tanxente ao plano α nun punto P . A superficie esférica vén dada pola ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 - 18y + 2z + k = 0.$$

- c) Mostra que o punto $(0, 9, -1)$ é o centro da esfera.
d) Determina unha ecuación paramétrica da recta que pasa polo centro da esfera e polo punto P .
e) Determina a constante k da ecuación da superficie esférica.

[Nota: Os vectores escríbense en Noruega entre corchetes: $[a, b, c]$.]

8. (3 puntos)

Un alumno tenta demostrar a afirmación de arriba.

Afirmación

Se dous vectores $\vec{p}$ e $\vec{q}$ son ortogonais, entón $|\vec{p} + \vec{q}|^2 = |\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2$.

Demostración do alumno

$$\vec{p} = [4, 0, 0]$$

$$\vec{q} = [0, 0, 3]$$

$$\text{Entón } |\vec{p} + \vec{q}|^2 = |[4, 0, 3]|^2 = 4^2 + 0^2 + 3^2 = 25$$

$$\text{e } |\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 = 4^2 + 3^2 = 25$$

Polo tanto, a afirmación é correcta.

- a) Explica por que isto non é unha demostración matemática válida da afirmación.
- b) Demostra a afirmación mediante cálculo vectorial.

Parte 2 – Con axudas

1. (6 puntos)

A empresa IntCom é un proveedor de internet. A empresa encárgase da transferencia de datos entre os clientes e internet. O tráfico de datos varía ao longo do día.

A táboa de embaixo mostra o tráfico de datos (gigabits por hora) durante un día de maio.

Hora (reloxo)	00:00	02:00	06:00	08:00	12:00	16:00	20:00	22:00
Tráfico (gigabits/h)	58 280	39 400	22 550	32 200	67 450	86 110	102 007	87 810

- a) Elabora un bo modelo $S(t)$ para o tráfico de datos, en gigabits por hora, t horas despois da medianoite dese día.

No resto do exercicio debes usar o modelo

$$D(t) = 63\,000 + 37\,000 \cdot \sin(0,24t - 3,0)$$

para o tráfico de datos $D(t)$, t horas despois da medianoite dese día.

- b) Cando foi o tráfico de datos da empresa maior de 90 000 gigabits por hora segundo o modelo?
- c) Cando aumentou o tráfico de datos máis rapidamente, e de canto foi ese aumento segundo o modelo?
- d) Que parte da cantidade total de datos que IntCom transferiu ese día se transferiu durante a xornada laboral, é dicir, entre as 8 e as 16 horas, segundo o modelo?

2. (4 puntos)

Unha serie infinita vén dada pola relación recursiva

$$a_n = (a_{n-1} - 1)^2.$$

- a) Fai un programa que escriba os 6 primeiros termos da serie se $a_1 = 5$.
- b) Decide se existe algún número enteiro a_1 que faga que a serie sexa converxente.

3. (6 puntos)

Unha avioneta de hélice ten que facer unha aterraxe de emerxencia nunha autoestrada. A posición $\vec{r}(t)$ da avioneta t segundos despois de que comezase a aterraxe de emerxencia vén dada por

$$\vec{r}(t) = \left[30t - t^2, \quad 8 \sin\left(\frac{\pi}{10}t\right), \quad 50 \left(1 - \frac{t}{10}\right)^2 \right].$$

A autoestrada está no plano xy . As unidades ao longo dos eixes son metros.

- a) A que altura sobre a autoestrada está a avioneta 4 segundos despois de comezar a aterraxe de emerxencia?
- b) Determina a rapidez no momento en que a avioneta toma terra na autoestrada.
- c) En que instante da aterraxe de emerxencia é a rapidez igual a 14,3 m/s?

Un paxaro está na posición $(131, 67, 23)$ no momento en que a avioneta comeza a aterraxe de emerxencia. O paxaro voa en liña recta e cruza a traxectoria da avioneta no punto $(125, 8, \frac{25}{2})$. O paxaro mantén unha rapidez constante de 12 m/s.

d) Chocará o paxaro coa avioneta?

A rapidez (*banefart*) é o módulo do vector velocidade.

4.

(3 puntos)

Encárganche facer un vaso (xarrón) coa forma da imaxe de embaixo.

[Nota: Figura: fotografía dun xarrón de flores (tulipáns vermellos) de perfil ondulado, máis ancho na parte inferior, cun estreitamento e cunha boca que se volve abrir; é a imaxe que se debe imitar.]

O vaso debe ter unha capacidade de aproximadamente 1,5 L de auga e unha altura de 20 cm.

Usa o que sabes sobre corpos de revolución e trigonometría para crear unha función da forma

$$f(x) = A \cdot \sin(cx + \varphi) + d$$

que, ao xirar, dea un vaso con esta forma.

Debuxa a gráfica da función nun sistema de coordenadas no que as unidades ao longo dos eixes sexan centímetros.

Lembra xustificar a túa elección dos parámetros A , c , φ e d , e fai que a expresión da función apareza claramente na túa resposta.

Fontes

Parte 2, exercicio 4: imaxe de tphananh, de Pixabay. Outras imaxes, debuxos e representacións gráficas: Utdanningsdirektoratet.

[Nota: O caderno orixinal inclúe tamén a versión en nynorsk e, ao final, unha páxina de consellos xerais para o alumnado (“Tips til deg som akkurat har fått eksamensoppgaven”), que non se traducen.]

Solucións

Parte 1

Exercicio 1. a) $\int_0^2 (e^{2x} + x) dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^2 = \frac{1}{2}e^4 + 2 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{e^4+3}{2}}.$

b) Co cambio $u = \ln x$, $du = \frac{dx}{x}$: $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = \int \sin u du = \boxed{-\cos(\ln x) + C}.$

Exercicio 2. a) $f(x) = \int \frac{2}{x^2} dx = -\frac{2}{x} + C$. De $f(2) = 2$: $-1 + C = 2$, $C = 3$. Logo

$\boxed{f(x) = 3 - \frac{2}{x}}, x > 0.$

b) Cortes: $x = -\frac{3}{x} + 4 \iff x^2 - 4x + 3 = 0 \iff x = 1$ ou $x = 3$. En $(1, 3)$, $h(x) - g(x) = \frac{-(x-1)(x-3)}{x} > 0$, así que

$$A = \int_1^3 \left(4 - \frac{3}{x} - x\right) dx = \left[4x - 3 \ln x - \frac{x^2}{2}\right]_1^3 = 8 - 3 \ln 3 - 4 = \boxed{4 - 3 \ln 3 \approx 0,70}.$$

Exercicio 3. a) $\sin^2 v = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ e no 4.º cuadrante $\sin v < 0$: $\sin v = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

b) $\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \frac{\pi}{3}x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k \iff x = \pm\frac{1}{2} + 6k, k \in \mathbb{Z}$. En $\langle 0, 10 \rangle$: $x = \frac{1}{2}, \frac{11}{2}, \frac{13}{2}$ ($\frac{23}{2}$ xa queda fóra).

Exercicio 4. O valor máximo é 1 e o mínimo -3 : amplitude $A = \frac{1-(-3)}{2} = 2$ e eixe de equilibrio $d = \frac{1+(-3)}{2} = -1$. O período é π , logo $c = \frac{2\pi}{\pi} = 2$. Como hai un mínimo en $x = 0$, serve $-\cos$:

$$f(x) = -2\cos(2x) - 1$$

(equivalentemente, $f(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{2}) - 1$).

Exercicio 5.

$$V = \pi \int_1^3 (2x-1)^2 dx = \pi \left[\frac{(2x-1)^3}{6} \right]_1^3 = \pi \frac{125-1}{6} = \frac{62\pi}{3} \approx 64,9.$$

(É un tronco de cono de raios 1 e 5 e altura 2: $\frac{\pi \cdot 2}{3}(1+5+25) = \frac{62\pi}{3}$.)

Exercicio 6. a) Os lados forman unha progresión aritmética con $a_1 = 5$ e $d = -0,1$: $a_n = 5 - 0,1(n-1)$. A serie é

$$5 + 4,9 + 4,8 + \dots + 0,1 = \sum_{n=1}^{50} (5 - 0,1(n-1)) = \frac{50(5+0,1)}{2} = 127,5 \text{ m.}$$

Debe ser $a_n > 0 \iff n < 51$, polo que a torre pode ter como máximo **50 táboas** (a última de lado 0,1 m).

b) Os lados forman unha progresión xeométrica de razón 0,9, logo as áreas forman unha progresión xeométrica de razón $0,9^2 = 0,81$ e primeiro termo 19. Como $|0,81| < 1$, a serie xeométrica infinita converge:

$$19 + 19 \cdot 0,81 + 19 \cdot 0,81^2 + \dots = \frac{19}{1-0,81} = \frac{19}{0,19} = 100.$$

A área total achégase a **100 m²** sen chegar a superala.

Exercicio 7. a) $2 \cdot 3 - 5 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) = -3 \neq -4$: **D non** está en α .

b) $\vec{AB} = [1, -2, -3]$, $\vec{AC} = [-2, 0, 1]$ e

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = [(-2)(1) - (-3)(0), (-3)(-2) - (1)(1), (1)(0) - (-2)(-2)] = [-2, 5, -4] = -[2, -5, 4].$$

Como $\vec{AB} \times \vec{AC}$ é perpendicular a dous vectores non paralelos do plano, $[2, -5, 4]$ (paralelo a el) é un vector normal a α .

c) Completando cadrados: $x^2 + (y-9)^2 + (z+1)^2 = 82 - k$, que é a ecuación dunha esfera de centro **$M(0, 9, -1)$** e $r^2 = 82 - k$.

d) A recta MP é perpendicular ao plano tanxente, logo ten a dirección de $[2, -5, 4]$:

$$x = 2t, \quad y = 9 - 5t, \quad z = -1 + 4t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

e) Substituíndo a recta no plano: $4t - 5(9 - 5t) + 4(-1 + 4t) = -4 \iff 45t = 45 \iff t = 1$, logo $P(2, 4, 3)$ e $r = |\vec{MP}| = |[2, -5, 4]| = \sqrt{45}$ (tamén $r = \frac{|0-45-4+4|}{\sqrt{45}} = \sqrt{45}$). Entón $82 - k = 45$, **$k = 37$** .

Exercicio 8. a) O alumno só comproba a igualdade para un exemplo concreto de vectores ortogonais. Un exemplo non demostra unha afirmación xeral (só serviría un exemplo para refutala); hai que probala para *todos* os pares de vectores ortogonais.

b) Sexan $\vec{p}, \vec{q}$ con $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$. Polas propiedades do produto escalar,

$$|\vec{p} + \vec{q}|^2 = (\vec{p} + \vec{q}) \cdot (\vec{p} + \vec{q}) = \vec{p} \cdot \vec{p} + 2\vec{p} \cdot \vec{q} + \vec{q} \cdot \vec{q} = |\vec{p}|^2 + 2 \cdot 0 + |\vec{q}|^2 = |\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2. \quad \blacksquare$$

Parte 2

Exercicio 1. a) Os datos son periódicos (diarios), así que se axusta un modelo sinusoidal por regresión ($S(t) = a \sin(bt+c)+d$, t en horas). Coa regresión sinusoidal (GeoGebra/Python) obtense

$$S(t) \approx 37\,200 \sin(0,243t - 2,96) + 63\,200$$

O período $2\pi/0,243 \approx 25,9$ h está preto das 24 h do ciclo diario, o que fai o modelo razoábel dentro do día (non necesariamente para varios días).

b) $D(t) > 90\,000 \iff \sin(0,24t-3) > \frac{27}{37}$. Resolvendo $D(t) = 90\,000$ con CAS en $[0, 24]$: $t_1 \approx 15,91$ e $t_2 \approx 22,18$. O tráfico superou 90 000 Gb/h **entre as 15:54 e as 22:11, aproximadamente**.

c) $D'(t) = 37\,000 \cdot 0,24 \cos(0,24t - 3) = 8880 \cos(0,24t - 3)$, que é máxima cando $0,24t - 3 = 0$, isto é, $t = 12,5$ (o seguinte máximo, $t \approx 38,7$, queda fóra do día). O tráfico aumentou máis rapidamente ás **12:30**, cun aumento de **8880 (gigabits/h) por hora**.

d) A cantidade de datos é a integral do tráfico:

$$\frac{\int_8^{16} D(t) dt}{\int_0^{24} D(t) dt} \approx \frac{473\,763}{1\,502\,454} \approx \boxed{0,315}$$

Aproximadamente o 31,5 % (case un terzo) dos datos transferíronse na xornada laboral.

Exercicio 2. a) Por exemplo, en Python:

```
a = 5
for n in range(1, 7):
    print(n, a)
    a = (a - 1)**2
```

Saída: $a_1 = 5$, $a_2 = 16$, $a_3 = 225$, $a_4 = 50\,176$, $a_5 = 2\,517\,530\,625$, $a_6 = 6\,337\,960\,442\,777\,829\,376$.

b) Se a sucesión converxese a L , por continuidade $L = (L-1)^2 \iff L^2 - 3L + 1 = 0 \iff L = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, que son irracionais. Mais se $a_1 \in \mathbb{Z}$, todos os termos son enteiros, e unha sucesión de enteiros converxente é finalmente constante e igual ao límite, que entón tería que ser enteiro: contradición. De xeito máis explícito: $a_2 = (a_1 - 1)^2 \geq 0$; se algún $a_n \geq 3$, entón $a_{n+1} - a_n = a_n^2 - 3a_n + 1 \geq 1$ (pois $a_n^2 - 3a_n = a_n(a_n - 3) \geq 0$), e a sucesión crece sen cota; se $a_n \in \{0, 1, 2\}$, entra no ciclo $\dots, 1, 0, 1, 0, \dots$ (por exemplo, $a_1 = 2$: $2, 1, 0, 1, 0, \dots$), que oscila. **Non existe** ningún enteiro a_1 que faga a sucesión converxente (e, con máis razón, tampouco a serie $\sum a_n$, pois os termos non tenden a 0).

[Nota: O enunciado usa “serie” (rekke) no sentido da sucesión dada pola recorrencia; a conclusión é a mesma en ambas as lecturas.]

Exercicio 3. a) $z(4) = 50(1 - 0,4)^2 = 50 \cdot 0,36 = \boxed{18 \text{ m}}$.

b) Toma terra cando $z(t) = 0 \iff t = 10$. A velocidade é

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \left[30 - 2t, \frac{4\pi}{5} \cos\left(\frac{\pi}{10}t\right), -10\left(1 - \frac{t}{10}\right) \right], \quad \vec{v}(10) = \left[10, -\frac{4\pi}{5}, 0 \right],$$

e a rapidez é $|\vec{v}(10)| = \sqrt{100 + \frac{16\pi^2}{25}} \approx 10,3 \text{ m/s}$.

c) Resolvendo $|\vec{v}(t)| = 14,3$ con CAS en $[0, 10]$ (a rapidez decrece desde 31,7 m/s ata 10,3 m/s) obtense unha única solución, $t \approx 8,0 \text{ s}$.

d) A avioneta pasa polo punto $(125, 8, \frac{25}{2})$ cando $30t - t^2 = 125$, $t = 5$ (e efectivamente $y(5) = 8 \sin \frac{\pi}{2} = 8$, $z(5) = 50 \cdot \frac{1}{4} = \frac{25}{2}$). O paxaro percorre a distancia

$$\sqrt{6^2 + 59^2 + 10,5^2} = \sqrt{3627,25} \approx 60,23 \text{ m} \quad \text{en} \quad \frac{60,23}{12} \approx 5,02 \text{ s}.$$

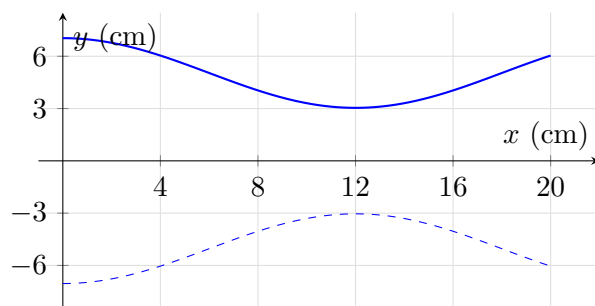
Segundo o modelo (puntos), o paxaro chega ao cruzamento uns 0,02 s despois ca a avioneta: **non choca**, pero por moi pouco (a distancia mínima entre ambos é duns 0,2 m). Como unha avioneta real mide varios metros, na práctica o paxaro case seguro que a golpearía.

Exercicio 4. (Exercicio aberto; unha solución posíbel.) Colocamos o vaso deitado: o eixe x é o eixe de simetría (desde a base, $x = 0$, ata a boca, $x = 20$) e $f(x)$ é o raio en cm. O volume é $V = \pi \int_0^{20} f(x)^2 dx$.

- O vaso é máis ancho na base, estréitase e volve abrirse na boca: tomamos un máximo en $x = 0$ e o mínimo (pescozo) en $x = 12$. Medio período = 12 cm, logo $c = \frac{\pi}{12}$; máximo en $x = 0$: $\frac{\pi}{12} \cdot 0 + \varphi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Na boca, $\frac{20\pi}{12} + \frac{\pi}{2}$ dá $\sin = \frac{1}{2}$: a boca ten un raio intermedio.
- $A = 2$: o raio varía ± 2 cm arredor do valor medio, unha ondulación visíbel.
- d escóllese para que $V = 1500 \text{ cm}^3$ (1,5 L): $\pi \int_0^{20} \left(2 \sin \left(\frac{\pi}{12}x + \frac{\pi}{2} \right) + d \right)^2 dx = 20\pi(d^2 + 2) - 24\sqrt{3}d - 6\sqrt{3} = 1500$, que dá $d \approx 5,04$.

$$f(x) = 2 \sin \left(\frac{\pi}{12}x + \frac{\pi}{2} \right) + 5,04, \quad 0 \leq x \leq 20$$

Raio na base $\approx 7,0$ cm, no pescozo ($x = 12$) $\approx 3,0$ cm e na boca $\approx 6,0$ cm; volume 1500 cm^3 (comprobado con CAS).



17 Vietnam

PISA 2025, matemáticas: 443 puntos

Dificultade relativa estimada: 4/10 (posto 21 dos 25 exames analizados; PAU de Galiza = 5)

Exame: Exame de graduación de secundaria superior (THPT), materia de Matemáticas

Nome orixinal: Kỳ thi tốt nghiệp THPT năm 2025 – Môn thi: Toán (“Exame de graduación de secundaria superior 2025 – Materia: Matemáticas”); código de exame (*mã đề*) 0101

Ano e convocatoria: 2025, convocatoria principal (26 de xuño de 2025)

Duración: 90 minutos, sen contar o tempo de repartición do exame **Calculadora:** permitida (calculadora científica sen memoria de texto, segundo o regulamento habitual)

Estrutura e cualificación: primeiro ano do novo formato (programa de educación xeral de 2018): 22 preguntas en tres partes. Parte I: 12 preguntas de escolla múltiple con catro opcións (0,25 puntos cada unha, 3 puntos). Parte II: 4 preguntas de verdadeiro/falso con catro afirmacións a)–d) cada unha, con puntuación progresiva segundo o número de afirmacións acertadas na mesma pregunta (1 acerto: 0,1; 2: 0,25; 3: 0,5; 4: 1 punto), 4 puntos. Parte III: 6 preguntas de resposta curta numérica (0,5 puntos cada unha, 3 puntos). Total: 10 puntos. (Datos de puntuación segundo a normativa habitual do Ministerio para 2025.)

Contexto: exame nacional único elaborado polo Ministerio de Educación e Formación (*Bộ Giáo dục và Đào tạo*). Serve á vez para obter o título de secundaria superior e como principal criterio de admisión na maioría das universidades. Matemáticas é materia obrigatoria para todo o alumnado. Hai 24 códigos de exame (0101–0124) coas mesmas preguntas en distinta orde ou con datos lixeiramente distintos.

Fonte: <https://toanmath.com/toanmath-pdf/de-chinh-thuc-ky-thi-tot-nghiep-thpt-nam-2025-mon-toan.pdf> (páxinas 1–4, código 0101) e páxina <https://toanmath.com/2025/06/de-chinh-thuc-ky-thi-tot-nghiep-thpt-nam-2025-mon-toan.html>; resposta oficial do Ministerio: <https://drive.google.com/drive/folders/1-Ielgh4yTFWf1SEQutdGm6rDWieQjKW6>

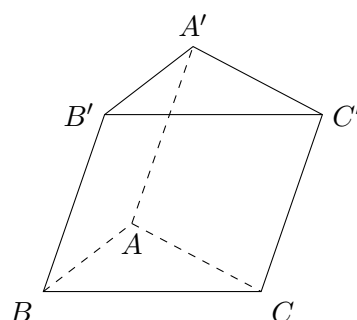
Instrucións

Ministerio de Educación e Formación. EXAME OFICIAL. Exame de graduación de secundaria superior do ano 2025. Materia: MATEMÁTICAS. Tempo para realizar a proba: 90 minutos, sen contar o tempo de repartición do exame. O exame ten 4 páxinas. Código de exame: 0101.

PARTE I

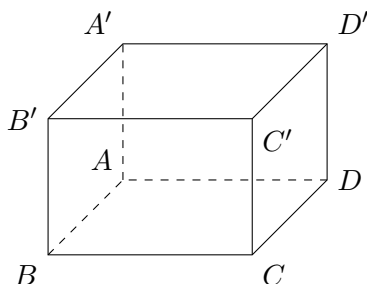
Responde ás preguntas 1 a 12. En cada pregunta escolle só unha opción.

1. Considera o prisma $ABC.A'B'C'$ (ver a figura). Cal das seguintes afirmacións é correcta?



- (A) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{BC'}$
 (B) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{C'B'}$
 (C) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{BC}$
 (D) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'A}$

2. Considera o paralelepípedo $ABCD.A'B'C'D'$ (ver a figura). A recta AB é paralela a cal dos seguintes planos?



- (A) $(CC'A'A)$
 (B) $(BB'C'C)$
 (C) $(A'B'C'D')$
 (D) $(AA'D'D)$
3. Unha persoa dividiu a duración (en segundos) das chamadas telefónicas que fixo nunha semana en seis grupos e elaborou a seguinte táboa de frecuencias agrupadas.

Grupo	$[0; 40)$	$[40; 80)$	$[80; 120)$	$[120; 160)$	$[160; 200)$	$[200; 240)$
Frecuencia	11	10	6	8	4	1

O terceiro cuartil Q_3 (en segundos) desta mostra de datos agrupados é igual a

- (A) 145
 (B) 140
 (C) 135
 (D) 130
4. No espazo cun sistema de coordenadas $Oxyz$, considera a recta $(d): \frac{x-3}{4} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z-1}{2}$. Cal dos seguintes vectores é un vector director da recta (d) ?
- (A) $\vec{v}_3 = (4; 5; 2)$
 (B) $\vec{v}_1 = (3; -2; 1)$
 (C) $\vec{v}_4 = (3; 2; 1)$
 (D) $\vec{v}_2 = (4; -5; 2)$
5. A familia de primitivas da función $f(x) = x^2$ é
- (A) $\frac{1}{3}x^3 + C$
 (B) $2x^3 + C$
 (C) $3x^3 + C$
 (D) $\frac{1}{2}x^3 + C$
6. Considera a progresión aritmética (u_n) con $u_1 = 4$ e diferenza $d = -3$. O valor de u_5 é

- (A) 16
- (B) 19
- (C) -8
- (D) -11

7. O conxunto solución da ecuación $\sin x = 0$ é

- (A) $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$
- (B) $S = \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
- (C) $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$
- (D) $S = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

8. No plano cun sistema de coordenadas Oxy , a área S da rexión plana limitada pola gráfica da función $y = 2x - 3$, o eixe de abscisas e as rectas $x = 1$, $x = 2$ vén dada pola fórmula

- (A) $S = \pi \int_1^2 |2x - 3| dx$
- (B) $S = \int_1^2 |2x - 3| dx$
- (C) $S = \pi \int_1^2 (2x - 3)^2 dx$
- (D) $S = \left| \int_1^2 (2x - 3) dx \right|$

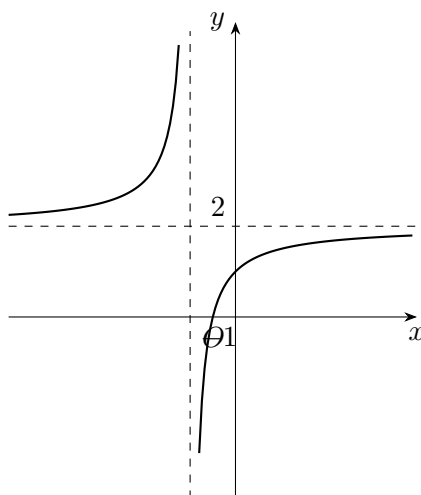
9. No espazo cun sistema de coordenadas $Oxyz$, o plano que pasa polo punto $A(2; 1; -4)$ e ten $\vec{n} = (3; 2; -1)$ como vector normal ten por ecuación

- (A) $3(x - 2) + 2(y - 1) - (z + 4) = 0$
- (B) $2(x + 3) + (y + 2) - 4(z - 1) = 0$
- (C) $3(x + 2) + 2(y + 1) - (z - 4) = 0$
- (D) $2(x - 3) + (y - 2) - 4(z + 1) = 0$

10. A solución da ecuación $\log_3(2x - 1) = 2$ é

- (A) $x = \frac{7}{2}$
- (B) $x = \frac{5}{2}$
- (C) $x = 5$
- (D) $x = 4$

11. Considera a función $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ($ac \neq 0$, $ad - bc \neq 0$), cuxa gráfica se mostra na figura. A asíntota vertical da gráfica da función ten por ecuación



- (A) $y = 2$
 (B) $x = -1$
 (C) $y = -1$
 (D) $x = 2$
12. Considera a pirámide $S.ABC$ con SA perpendicular ao plano (ABC) , o triángulo ABC rectángulo en A e $SA = 3$, $AB = 4$, $AC = 5$. O volume da pirámide $S.ABC$ é
- (A) 30
 (B) 20
 (C) 60
 (D) 10

PARTE II

Responde ás preguntas 1 a 4. En cada apartado a), b), c), d) de cada pregunta, indica se é verdadeiro ou falso.

1. Considera a función $f(x) = x^3 - 12x - 8$.
- a) A función ten por derivada $f'(x) = 3x^2 - 12$.
 b) A ecuación $f'(x) = 0$ ten por conxunto solución $S = \{2\}$.
 c) $f(2) = 24$.
 d) O valor máximo da función $f(x)$ no intervalo $[-3; 3]$ é 24.
2. Na acuicultura, controlar a cantidade de medicamento residual na auga é unha tarefa importante para cumprir as normas de seguridade ambiental. Ao estudar un medicamento para tratar enfermidades en acuicultura, utilízase ese medicamento unha vez e faise un seguimento da concentración do medicamento residual na auga desde o momento da súa aplicación. Os resultados mostran que a concentración $y(t)$ (en mg/litro) de medicamento residual na auga no instante t días ($t \geq 0$) desde a aplicación verifica $y(t) > 0$ e

$$y'(t) = k \cdot y(t) \quad (t \geq 0),$$

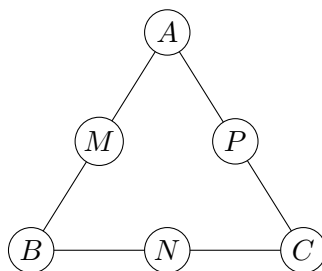
onde k é unha constante non nula. Medindo a concentración de medicamento residual na auga nos instantes $t = 6$ (días) e $t = 12$ (días) obtivéronse, respectivamente, 2 mg/litro e 1 mg/litro. Sábese que $y(t) = e^{g(t)}$ ($t \geq 0$).

- a) $g(t) = kt + C$ ($t \geq 0$), sendo C unha constante determinada.
- b) $k = \frac{\ln 2}{6}$.
- c) $C = 2 \ln 2$.
- d) A concentración de medicamento residual na auga no instante $t = 25$ (días) desde a aplicación é maior que 0,25 mg/litro.
3. O seguinte modelo matemático úsase para observar o movemento dun obxecto. No espazo, considera un sistema de coordenadas $Oxyz$ con $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ os vectores unitarios dos eixes Ox , Oy , Oz , respectivamente, e a lonxitude de cada un deses vectores unitarios igual a 1 metro. Considera dous puntos A e B , onde o punto A ten coordenadas $(5; 5; 0)$. Un obxecto (considerado como unha partícula) móvese en liña recta cunha velocidade que depende do tempo t (segundos) segundo a fórmula $v(t) = \beta t + 300$ (m/s), onde β é unha constante positiva e $0 \leq t \leq 6$. No instante inicial ($t = 0$), o obxecto pasa por A cunha velocidade de 300 m/s e en dirección a B . Ao cabo de 2 segundos desde o instante inicial, o obxecto percorreu unha distancia de 604 m. Sexa $\vec{u} = (a; b; c)$ un vector co mesmo sentido que o vector $\overrightarrow{AB}$. Sábese que $|\vec{u}| = 1$ e que os ángulos entre o vector $\vec{u}$ e os vectores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ miden, respectivamente, 60° , 60° e 45° .
- a) $a = \cos 60^\circ$.
- b) A recta AB ten por ecuación $\frac{x-5}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z}{2}$.
- c) $\beta = 2$.
- d) Supón que, ao cabo de 5 segundos desde o instante inicial, o obxecto chega ao punto $B(x_B; y_B; z_B)$. Entón $x_B > 768$.
4. Un programa reconece as mensaxes publicitarias no teléfono baseándose en palabras clave para marcar algunhas das mensaxes recibidas. Tras moito tempo de uso, observouse que, de todas as mensaxes recibidas, o 15 % son marcadas. Entre as mensaxes marcadas, o 10 % non son publicidade. Entre as mensaxes non marcadas, o 5 % son publicidade. Escóllese ao chou unha mensaxe recibida no teléfono.
- a) A probabilidade de que esa mensaxe non estea marcada é 0,85.
- b) A probabilidade de que esa mensaxe non sexa publicidade, sabendo que non está marcada, é 0,95.
- c) A probabilidade de que esa mensaxe non sexa publicidade é 0,85.
- d) A probabilidade de que esa mensaxe non estea marcada, sabendo que non é publicidade, é maior que 0,95.

PARTE III

Responde ás preguntas 1 a 6.

1. Nam participa nun concurso de descifrar unha mensaxe secreta. Segundo as regras do concurso, o xogador debe escoller seis números do conxunto $S = \{11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19\}$ e colocar cada número exactamente nunha das seis posicións A, B, C, M, N, P da figura, de modo que en cada posición se coloque un só número. A mensaxe quedará descifrada se os tríos de números que aparecen nos tríos de posicións (A, M, B) , (B, N, C) , (C, P, A) forman progresións aritméticas, nesa orde. Nam escolle ao chou seis números do conxunto S e colócaos ao chou nas posicións requiridas. Sexa a a probabilidade de que Nam descifre a mensaxe con esa elección e colocación. Canto vale $\frac{1}{a}$?

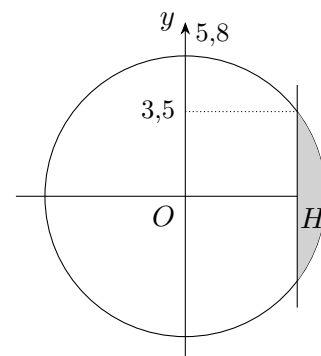
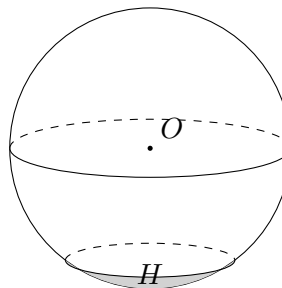
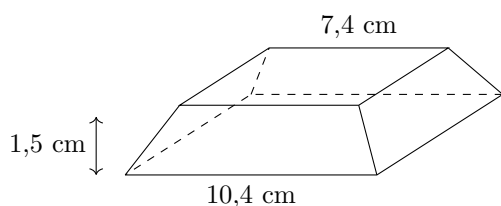


2. Se unha empresa produce x produtos nun mes ($x \in \mathbb{N}^*$; $1 \leq x \leq 4500$), o ingreso obtido ao vender todos eses produtos é $F(x) = -0,01x^2 + 300x$ (miles de dong), mentres que o custo medio de produción por produto é $G(x) = \frac{30\,000}{x} + 200$ (miles de dong). Supón que todos os produtos fabricados se venden sempre. Nun mes, cal é o número mínimo de produtos que debe fabricar a empresa para que o beneficio obtido sexa maior que 100 millóns de dong?
3. Para recadar fondos benéficos, o clube de voluntariado dun instituto de secundaria superior organiza unha venda de dous produtos: limoada e patacas fritas. O clube deseña dous menús. O menú 1 custa 30 mil dong e inclúe dous vasos de limoada e unha bolsa de patacas fritas. O menú 2 custa 50 mil dong e inclúe tres vasos de limoada e dúas bolsas de patacas fritas. Sábese que o clube só pode preparar como máximo 165 vasos de limoada e 100 bolsas de patacas fritas. Cal é a maior cantidade de diñeiro (en miles de dong) que pode obter o clube despois de vender todo?
4. Considera a pirámide $S.ABCD$ de base o rombo $ABCD$ con $\widehat{ABC} = 60^\circ$ e $AB = 2$. Sábese que a proxección ortogonal de S sobre o plano $(ABCD)$ é o baricentro H do triángulo ABC e que $SH = \sqrt{3}$. Canto vale a distancia entre as rectas AC e SD (sen redondear os resultados dos cálculos intermedios; redondea só o resultado final ás centésimas)?
5. Hai catro andeis (nunha estantería) numerados 1, 2, 3, 4 e sete libros distintos. An coloca os sete libros nos catro andeis de modo que cada andel teña polo menos un libro e que, en cada andel, os libros estean colocados verticalmente formando unha fila horizontal co lombo cara a fóra. Unha vez colocados os sete libros, dúas colocacións de An considéranse iguais se cumpren simultaneamente as dúas condicións seguintes:

- + en cada andel, o número de libros dese andel é o mesmo nas dúas colocacións;
- + en cada andel, a orde de esquerda a dereita dos libros colocados é a mesma nas dúas colocacións.

Sexa T o número de colocacións de An distintas dúas a dúas. Canto vale $\frac{T}{100}$?

6. Para poder colocar un obxecto decorativo sobre a superficie dunha mesa, deséñase unha base de apoio do seguinte xeito. Tómase un bloque de madeira con forma de tronco de pirámide cuadrangular regular cuxas arestas das bases miden, respectivamente, 7,4 cm e 10,4 cm, e cuxo grosor é de 1,5 cm. Despois escávase unha parte do bloque de madeira de modo que esa parte ten a forma do corpo H , onde H se obtén cortando unha bóla de raio 5,8 cm por un plano cuxa sección é un círculo de raio 3,5 cm (ver as figuras).



[Nota: Nas figuras: o tronco de pirámide (bloque de madeira), a esfera co corpo H sombreado (o casquete esférico pequeno) e unha sección pola orixe O na que a recta vertical representa o plano de corte e a corda determinada ten semilongitude 3,5.]

Canto vale o volume da base de apoio en centímetros cúbicos (sen redondear os resultados dos cálculos intermedios; redondea só o resultado final ás décimas)?

— FIN —

- As persoas candidatas non poden usar material de consulta.
- O persoal de vixilancia non dará ningunha explicación adicional.

Solucións

PARTE I

Pregunta 1. Como $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$ (as bases do prisma son traslación unha da outra), $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$. **Resposta: (C)**

Pregunta 2. $AB \parallel A'B' \subset (A'B'C'D')$ e $AB \not\subset (A'B'C'D')$, logo $AB \parallel (A'B'C'D')$. Os outros tres planos conteñen A ou B , polo que cortan a recta AB ou a conteñen. **Resposta: (C)**

Pregunta 3. $n = 40$, $\frac{3n}{4} = 30$. Frecuencias acumuladas: 11, 21, 27, 35, ...; o cuartil está en $[120; 160)$: $Q_3 = 120 + \frac{30 - 27}{8} \cdot 40 = 135$. **Resposta: (C)**

Pregunta 4. O vector director lese nos denominadores: $(4; -5; 2)$. **Resposta: (D)**

Pregunta 5. $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$. **Resposta: (A)**

Pregunta 6. $u_5 = u_1 + 4d = 4 - 12 = -8$. **Resposta: (C)**

Pregunta 7. $\sin x = 0 \iff x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. **Resposta: (D)**

Pregunta 8. A área entre a gráfica e o eixe OX en $[1; 2]$ é $\int_1^2 |2x - 3| dx$ (as opcións con π son volumes de revolución; a (D) daría 0, xa que $2x - 3$ cambia de signo en $x = \frac{3}{2}$). **Resposta: (B)**

Pregunta 9. $3(x - 2) + 2(y - 1) - 1 \cdot (z + 4) = 0$. **Resposta: (A)**

Pregunta 10. $2x - 1 = 3^2 = 9 \Rightarrow x = 5$ (verifica $2x - 1 > 0$). **Resposta: (C)**

Pregunta 11. Na figura a asíntota vertical é a recta $x = -1$ ($y = 2$ é a horizontal). **Resposta: (B)**

Pregunta 12. $V = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 10 = 10$. **Resposta: (D)**

PARTE II

Pregunta 1. $f(x) = x^3 - 12x - 8$.

a) $f'(x) = 3x^2 - 12$. **Verdadeiro.**

b) $3x^2 - 12 = 0 \iff x = \pm 2$, logo $S = \{-2; 2\}$. **Falso.**

c) $f(2) = 8 - 24 - 8 = -24$. **Falso.**

d) Puntos críticos en $[-3; 3]$: ± 2 . $f(-3) = 1$, $f(-2) = 8$, $f(2) = -24$, $f(3) = -17$. O máximo é 8. **Falso.**

Pregunta 2. a) $y = e^g \Rightarrow y' = g'e^g = k e^g \Rightarrow g'(t) = k \Rightarrow g(t) = kt + C$. **Verdadeiro.**

b) $g(6) = 6k + C = \ln 2$, $g(12) = 12k + C = \ln 1 = 0$. Restando: $6k = -\ln 2$, $k = -\frac{\ln 2}{6}$. **Falso.**

c) $C = -12k = 2 \ln 2$. **Verdadeiro.**

d) $y(25) = e^{2 \ln 2 - \frac{25}{6} \ln 2} = 2^{-13/6} \approx 0,2227 < 0,25$. **Falso.**

Pregunta 3. a) $a = \vec{u} \cdot \vec{i} = |\vec{u}| \cos 60^\circ = \cos 60^\circ$. **Verdadeiro.**

b) $\vec{u} = (\cos 60^\circ; \cos 60^\circ; \cos 45^\circ) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \parallel (1; 1; \sqrt{2})$, que non é proporcional a $(1; 1; 2)$. **Falso.**

c) Distancia percorrida en 2 s: $\int_0^2 (\beta t + 300) dt = 2\beta + 600 = 604 \Rightarrow \beta = 2$. **Verdadeiro.**

d) En 5 s: $s = \int_0^5 (2t + 300) dt = 25 + 1500 = 1525$ m, e $B = A + 1525 \vec{u}$, logo $x_B = 5 + \frac{1525}{2} = 767,5 < 768$. **Falso.**

Pregunta 4. Sexan $M =$ “marcada” e $Q =$ “publicidade”: $P(M) = 0,15$, $P(\overline{Q} \mid M) = 0,1$, $P(Q \mid \overline{M}) = 0,05$.

a) $P(\overline{M}) = 1 - 0,15 = 0,85$. **Verdadeiro.**

b) $P(\overline{Q} \mid \overline{M}) = 1 - 0,05 = 0,95$. **Verdadeiro.**

c) $P(\overline{Q}) = 0,15 \cdot 0,1 + 0,85 \cdot 0,95 = 0,015 + 0,8075 = 0,8225 \neq 0,85$. **Falso.**

d) $P(\overline{M} \mid \overline{Q}) = \frac{0,8075}{0,8225} \approx 0,9818 > 0,95$. **Verdadeiro.**

PARTE III

Pregunta 1. Casos posíbeis (escoller e colocar 6 números distintos en 6 posicións): $V_{9,6} = \frac{9!}{3!} = 60480$. Casos favorábeis: $M = \frac{A+B}{2}$, $N = \frac{B+C}{2}$, $P = \frac{C+A}{2}$ quedan determinados por (A, B, C) , que deben ter a mesma paridade. Ternas ordenadas de impares $\{11, 13, 15, 17, 19\}$: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$; de pares $\{12, 14, 16, 18\}$: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$; total 84. Os puntos medios están en S e

son distintos entre si; só falla a distinción cando un dos vértices é a media dos outros dous (trío en progresión aritmética): hai 4 tríos impares ($\{11, 13, 15\}$, $\{13, 15, 17\}$, $\{15, 17, 19\}$, $\{11, 15, 19\}$) e 2 pares ($\{12, 14, 16\}$, $\{14, 16, 18\}$), cada un con $3! = 6$ ordenacións: 36 casos. Favorábeis: $84 - 36 = 48$ (comprobado por forza bruta).

$$a = \frac{48}{60\,480} = \frac{1}{1260} \implies \boxed{\frac{1}{a} = 1260}$$

Pregunta 2. Beneficio (miles de dong): $L(x) = F(x) - xG(x) = -0,01x^2 + 300x - 30\,000 - 200x = -0,01x^2 + 100x - 30\,000$. $L(x) > 100\,000 \iff x^2 - 10\,000x + 13\,000\,000 < 0 \iff 5000 - 1000\sqrt{12} < x < 5000 + 1000\sqrt{12}$, isto é, $1535,9 < x < 8464,1$. Con $1 \leq x \leq 4500$ enteiro, o mínimo é $\boxed{1536}$ produtos.

Pregunta 3. Sexan $x, y \in \mathbb{N}$ os menús 1 e 2 vendidos. Maximizar $30x + 50y$ con $2x + 3y \leq 165$, $x + 2y \leq 100$. Vértices da rexión: $(0; 0)$, $(82,5; 0)$, $(30; 35)$ (intersección das dúas rectas), $(0; 50)$, con valores 0, 2475, 2650, 2500. O óptimo $(30; 35)$ é enteiro: $\boxed{2650}$ mil dong.

Pregunta 4. Como $\widehat{ABC} = 60^\circ$, o triángulo ABC é equilátero de lado 2. Sexa $O = AC \cap BD$. $AC \perp BD$ e $AC \perp SH$, logo $AC \perp (SBD)$ e a distancia pedida é a distancia de O á recta SD no plano (SBD) . $OB = OD = \sqrt{3}$, $HO = \frac{1}{3}OB = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $HD = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, $SD = \sqrt{3 + \frac{16}{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$. Entón $d(H, SD) = \frac{SH \cdot HD}{SD} = \frac{4\sqrt{3}}{5}$ e $d(O, SD) = \frac{OD}{HD} d(H, SD) = \frac{3}{4} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{5} = \frac{3\sqrt{3}}{5}$.

$$d(AC, SD) = \frac{3\sqrt{3}}{5} \approx \boxed{1,04}$$

Pregunta 5. Orde dos 7 libros nunha fila: $7!$; cortar a fila en 4 bloques non baleiros (andeis 1 a 4): $\binom{6}{3} = 20$. $T = 7! \cdot 20 = 100\,800$, logo $\boxed{T/100 = 1008}$.

Pregunta 6. Tronco de pirámide: $V_1 = \frac{h}{3} (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}) = \frac{1,5}{3} (7,4^2 + 10,4^2 + 7,4 \cdot 10,4) = 0,5 \cdot 239,88 = 119,94 \text{ cm}^3$. Casquete H : distancia do centro ao plano $d = \sqrt{5,8^2 - 3,5^2} = \sqrt{21,39}$, altura $h = 5,8 - \sqrt{21,39} \approx 1,1751$; $V_2 = \pi h^2 (R - \frac{h}{3}) \approx 23,4605 \text{ cm}^3$.

$$V = V_1 - V_2 \approx 96,4795 \approx \boxed{96,5 \text{ cm}^3}$$

[Nota: Resumo das respostas (verificadas con Python): Parte I: C, C, C, D, A, C, D, B, A, C, B, D; Parte II: V-F-F-F, V-F-V-F, V-F-V-F, V-V-F-V; Parte III: 1260; 1536; 2650; 1,04; 1008; 96,5.]

18 España (Andalucía)

PISA 2025, matemáticas: 442 puntos (Andalucía; España: 457)

Dificultade relativa estimada: 5/10 (posto 12 dos 25 exames analizados; PAU de Galiza = 5)

Exame: Proba de Acceso á Universidade (PAU) de Andalucía, Ceuta, Melilla e centros en Marrocos — Matemáticas II

Nome orixinal: *Prueba de Acceso a la Universidad (PAU) — Matemáticas II (Prueba de Acceso a la Universidad y Prueba de Admisión. Andalucía, Ceuta, Melilla y Centros en Marruecos. Curso 2025-2026)*

Ano e convocatoria: 2026, convocatoria ordinaria (xuño de 2026)

Duración: 1 hora e 30 minutos **Calculadora:** non programábel, non gráfica e sen capacidade para almacenar ou transmitir datos

Estrutura e cualificación: 6 exercicios, dos que se resolven 4: unha parte obrigatoria con 2 exercicios (1 e 2) e unha parte optativa con dous bloques de dous exercicios cada un (3.1/3.2 e 4.1/4.2), dos que se escolle un exercicio de cada bloque. Cada exercicio vale 2,5 puntos (total 10). Facilítase a táboa da distribución normal.

Contexto: Exame único para todas as universidades públicas andaluzas (Distrito Único Andaluz), elaborado pola ponencia de Matemáticas II. É materia troncal da modalidade de Ciencias e Tecnoloxía; a nota da PAU (60 % xunto co 40 % do bacharelato) e as ponderacións da fase de admisión determinan o acceso aos graos. En 2026 inscribíronse máis de 53 000 estudantes, cifra récord.

Fonte: <https://www.emestrada.org/wp-content/uploads/2026/06/MII-2026-JUNIO.pdf>; <https://www.elpespunte.es/articulo/andalucia/asi-ha-sido-examen-matematicas-ii-pau-2026-andalucia/20260603101928136258.html>; https://www.ebaumatematicas.com/wp-content/uploads/2026/06/2oBachCC_EBAU_Andalucia_2026-Ordinaria_Resuelto_JuanAntonioMG.pdf

Instrucións

- Duración: 1 hora e 30 minutos.
- Todas as cuestións deben responderse no papel entregado para a realización do exame e nunca nos folios que conteñen os enunciados.
- Este exame consta de seis exercicios distribuídos nunha parte con dous exercicios obrigatorios e unha parte con dous bloques con dous exercicios optativos cada un.
- Deben resolverse os dous exercicios obrigatorios e soamente un exercicio de cada un dos dous bloques con optatividade.
- Cada exercicio ten un valor máximo de 2,5 puntos.
- Permitirase o uso de calculadoras que non sexan programábeis, nin gráficas nin con capacidade para almacenar ou transmitir datos.
- Proporciónase a táboa da distribución normal.

Parte obrigatoria

Resolve os dous exercicios seguintes:

1. Unha ventá ten forma de rectángulo e está coroada por un semicírculo. Sabendo que o perímetro da ventá mide 8 metros, acha as dimensións da ventá que permitan a maior entrada de luz. **(2,5 puntos)**
2. Considera os puntos $A(1, 2, 0)$, $B(2, m, 1)$, $C(3, 4, 2)$ e $D(1, -1, m)$. **(2,5 puntos)**
 - a) **[1,5 puntos]** Acha os valores de m para os que os puntos anteriores son coplanarios.
 - b) **[1 punto]** Para $m = 1$, calcula a área do triángulo de vértices A , B , C e o volume do tetraedro de vértices A , B , C , D .

Bloque con optatividade 1

Resolve só un dos seguintes exercicios:

- 3.1. Considera o sistema **(2,5 puntos)**

$$\begin{cases} 3x - y = a^2 \\ (1 - a)y + 2z = 0 \\ 4y + (3 - a)z = a - 5 \end{cases}$$

- a) **[1,75 puntos]** Discúteo segundo os valores de a .
- b) **[0,75 puntos]** Para $a = 0$ resolve o sistema, se é posíbel.

- 3.2. Considera a matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ 2 & \alpha & \beta \\ 3 & 4 & \alpha \end{pmatrix}$ que cumpre $|A| = -2$. **(2,5 puntos)**

- a) **[1,5 puntos]** Calcula $\begin{vmatrix} -3 & -4 & -\alpha \\ \alpha - 2 & \beta - \alpha & 1 - \beta \\ 8 & 4\alpha & 4\beta \end{vmatrix}$.
- b) **[1 punto]** Calcula $|A^{-1} (A^t)^2 A|$.

Bloque con optatividade 2

Resolve só un dos seguintes exercicios:

- 4.1. Dada a función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{8e^x - 4e^{2x}}{1 + e^x}$, acha a primitiva de f cuxa gráfica ten por tanxente a recta $y = 2x + 12 \ln(2)$ no punto de abscisa $x = 0$. **(2,5 puntos)**
- 4.2. Dispoñemos de dúas bolsas con moedas de ouro e moedas de prata. Na primeira hai 2 moedas de ouro e 3 moedas de prata. Na segunda hai 6 moedas de ouro e 3 de prata. Sen mirar, extraemos unha moeda ao chou da primeira bolsa e depositámola na segunda bolsa. Despois extraemos unha moeda da segunda bolsa. **(2,5 puntos)**
 - a) **[0,75 puntos]** Calcula a probabilidade de que a segunda moeda sexa de ouro, sabendo que a moeda que se extraeu da primeira bolsa era de prata.
 - b) **[1,75 puntos]** Calcula a probabilidade de que a moeda que se extraeu da primeira bolsa fose de prata, sabendo que a segunda moeda é de ouro.

Comparación coa PAU de Galiza 2026

Os dous exames duran 90 minutos, permiten calculadora non programábel e cobren os mesmos catro bloques do currículo LOMLOE de Matemáticas II, pero organízanse de xeito distinto. A PAU galega (convocatoria ordinaria de 2026) ten 4 preguntas obrigatorias de peso desigual: estatística e probabilidade (2 puntos, sen optatividade: un problema de probabilidade total con dúas distribucións normais), álgebra (2 puntos, escoller entre unha ecuación matricial e un sistema con parámetro), análise (4 puntos, escoller 2 de 3 apartados: esbozar gráficas con propiedades dadas, catro límites e unha área cun parámetro) e xeometría (2 puntos, escoller entre dous problemas de puntos, rectas e planos). A andaluza esixe catro exercicios de 2,5 puntos, dous deles obrigatorios (un de optimización e un de xeometría métrica) e a optatividade é entre bloques temáticos: álgebra (sistema ou propiedades dos determinantes) e un segundo bloque que mestura análise e probabilidade (primitiva ou probabilidade condicionada). Así, en Andalucía un alumno pode evitar por completo a probabilidade ou o cálculo integral, mentres que en Galiza a probabilidade é obrigatoria e a análise pesa o 40 %.

	Andalucía 2026	Galiza 2026
Duración	90 min	90 min
Exercicios a facer	4 (de 6)	4 (con escolla interna)
Obrigatorios	optimización; xeometría	probabilidade (normal)
Optatividade	1 de 2 en cada bloque	2.1/2.2; 2 de 3 en 3; 4.1/4.2
Peso por bloques	2,5 cada exercicio	2 + 2 + 4 + 2
Tipo	problemas clásicos de cálculo	máis variado; algún apartado conceptual

Os exercicios andaluces son problemas estándar e moi recoñecíbeis (optimización xeométrica clásica, coplanaridade e volume con produto mixto, discusión dun sistema polo teorema de Rouché, propiedades dos determinantes, primitiva por cambio de variábel, árbore de probabilidades e Bayes), cun traballo de cálculo algo maior en cada un. O exame galego ten apartados máis curtos pero algúns máis conceptuais (deseñar gráficas con propiedades dadas ou decidir se son posíbeis) e unha pregunta de probabilidade con normais máis laboriosa. Globalmente as dificultades compensan: a carga e a técnica son similares e ningún dos dous esixe razoamento non rutineiro, polo que se lle asigna o mesmo valor de referencia, **5/10**. Exame galego de 2026 (resolto pola CiUG): https://www.ebaumatematicas.com/wp-content/uploads/2026/07/2oBachCC_EBAU_Galicia_2026-Ordinaria_Resuelto_CiUG.pdf (véxase tamén <https://ciug.gal>).

Solucións

Exercicio 1. Sexan r o raio do semicírculo (a base do rectángulo mide $2r$) e y a altura do rectángulo. O perímetro da ventá é $2r + 2y + \pi r = 8$, de onde $y = \frac{8 - (2 + \pi)r}{2}$, con $0 < r < \frac{8}{2 + \pi}$. A luz que entra é proporcional á área:

$$S(r) = 2ry + \frac{\pi r^2}{2} = r(8 - (2 + \pi)r) + \frac{\pi r^2}{2} = 8r - \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)r^2.$$

$S'(r) = 8 - (4 + \pi)r = 0 \iff r = \frac{8}{4 + \pi}$, e $S''(r) = -(4 + \pi) < 0$, logo é un máximo (absoluto, por ser S unha parábola cóncava). Daquela $y = \frac{8 - (2 + \pi)\frac{8}{4 + \pi}}{2} = \frac{8}{4 + \pi}$.

$\text{base} = 2r = \frac{16}{4 + \pi} \approx 2,24 \text{ m}, \quad \text{altura do rectángulo} = y = \frac{8}{4 + \pi} \approx 1,12 \text{ m}$
--

O raio do semicírculo é $r = \frac{8}{4+\pi} \approx 1,12$ m e a área máxima é $S = \frac{32}{4+\pi} \approx 4,48$ m² (a altura do rectángulo coincide co raio).

Exercicio 2. a) $\vec{AB} = (1, m-2, 1)$, $\vec{AC} = (2, 2, 2)$, $\vec{AD} = (0, -3, m)$. Os catro puntos son coplanares se e só se os tres vectores son linealmente dependentes:

$$\begin{vmatrix} 1 & m-2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & m \end{vmatrix} = 2m+6-(m-2)\cdot 2m-6 = -2m^2+6m = -2m(m-3) = 0 \iff \boxed{m=0 \text{ ou } m=3}.$$

b) Para $m=1$: $\vec{AB} = (1, -1, 1)$, $\vec{AC} = (2, 2, 2)$, $\vec{AB} \times \vec{AC} = (-4, 0, 4)$, polo que

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{32} = \boxed{2\sqrt{2} \text{ u}^2}.$$

O produto mixto vale $[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = -2 + 6 = 4$ (valor do determinante anterior en $m=1$), logo $V = \frac{1}{6} |4| = \boxed{\frac{2}{3} \text{ u}^3}$.

Exercicio 3.1. a) Matriz de coeficientes e ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1-a & 2 \\ 0 & 4 & 3-a \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & a^2 \\ 0 & 1-a & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3-a & a-5 \end{array} \right).$$

$|A| = 3[(1-a)(3-a) - 8] = 3(a^2 - 4a - 5) = 3(a-5)(a+1)$, que se anula en $a = -1$ e $a = 5$.

- Se $a \neq -1$ e $a \neq 5$: $\text{rang } A = \text{rang } A^* = 3$, **sistema compatíbel determinado**.
- Se $a = -1$: as ecuacións 2.^a e 3.^a son $2y + 2z = 0$ e $4y + 4z = -6$, incompatíbeis ($\text{rang } A = 2$, $\text{rang } A^* = 3$, pois $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \end{vmatrix} = -36 \neq 0$): **sistema incompatíbel**.
- Se $a = 5$: as ecuacións 2.^a e 3.^a son $-4y + 2z = 0$ e $4y - 2z = 0$, proporcionais; $\text{rang } A = \text{rang } A^* = 2 < 3$: **sistema compatíbel indeterminado**, con solucións $(\frac{25}{3} + \frac{\lambda}{6}, \frac{\lambda}{2}, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Para $a=0$ (compatíbel determinado): $3x - y = 0$, $y + 2z = 0$, $4y + 3z = -5$. Das dúas últimas, $y = -2z$ e $-8z + 3z = -5$, logo $z = 1$, $y = -2$ e $x = -\frac{2}{3}$:

$$\boxed{x = -\frac{2}{3}, \quad y = -2, \quad z = 1}.$$

Exercicio 3.2. Sexan $F_1 = (\alpha, \beta, 1)$, $F_2 = (2, \alpha, \beta)$, $F_3 = (3, 4, \alpha)$ as filas de A .

a) As filas do determinante pedido son, en orde, $-F_3$, $F_1 - F_2$ e $4F_2$. Sacando factores e usando a multilinealidade,

$$| -F_3, F_1 - F_2, 4F_2 | = -4 | F_3, F_1 - F_2, F_2 | = -4 (| F_3, F_1, F_2 | - | F_3, F_2, F_2 |) = -4 | F_3, F_1, F_2 |.$$

Como (F_3, F_1, F_2) é unha permutación circular (dúas trasposicións) de (F_1, F_2, F_3) , $| F_3, F_1, F_2 | = | A | = -2$. Polo tanto o determinante vale $-4 \cdot (-2) = \boxed{8}$.

b) Usando $|MN| = |M| |N|$, $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ e $|A^t| = |A|$:

$$|A^{-1}(A^t)^2 A| = \frac{1}{|A|} |A|^2 |A| = |A|^2 = \boxed{4}.$$

Exercicio 4.1. Co cambio $t = e^x$ ($dx = dt/t$):

$$\int \frac{8e^x - 4e^{2x}}{1 + e^x} dx = \int \frac{8 - 4t}{1 + t} dt = \int \left(-4 + \frac{12}{1 + t}\right) dt = -4e^x + 12 \ln(1 + e^x) + C.$$

A tanxente en $x = 0$ é $y = 2x + 12 \ln 2$, polo que $F(0) = 12 \ln 2$ (e, en efecto, $F'(0) = f(0) = \frac{8-4}{2} = 2$ coincide coa pendente). Como $F(0) = -4 + 12 \ln 2 + C$, resulta $C = 4$:

$$\boxed{F(x) = 12 \ln(1 + e^x) - 4e^x + 4}.$$

Exercicio 4.2. Sexan O_1, P_1 «a primeira moeda é de ouro/prata» e O_2 «a segunda moeda é de ouro». $P(O_1) = \frac{2}{5}$, $P(P_1) = \frac{3}{5}$. Se pasa unha de ouro, a segunda bolsa queda con 7 de ouro e 3 de prata; se pasa unha de prata, con 6 de ouro e 4 de prata.

a) $P(O_2 | P_1) = \frac{6}{10} = \boxed{\frac{3}{5} = 0,6}$.

b) Pola probabilidade total, $P(O_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{10} + \frac{3}{5} \cdot \frac{6}{10} = \frac{14}{50} + \frac{18}{50} = \frac{16}{25} = 0,64$. Polo teorema de Bayes,

$$P(P_1 | O_2) = \frac{P(P_1) P(O_2 | P_1)}{P(O_2)} = \frac{18/50}{32/50} = \boxed{\frac{9}{16} = 0,5625}.$$

19 Chile

PISA 2025, matemáticas: 403 puntos

Dificultade relativa estimada: non avaliada (sen enunciado)

Exame: PAES — Prueba de Acceso a la Educación Superior, Competencia Matemática 2 (M2). Forma oficial publicada da PAES de inverno, Proceso de Admisión 2027

Nome orixinal: *Prueba de Acceso a la Educación Superior (PAES) de Invierno — Competencia Matemática 2 (M2)* (Proba de Acceso á Educación Superior, Competencia Matemática 2)

Ano e convocatoria: aplicada o luns 15 de xuño de 2026 (PAES de inverno, Proceso de Admisión 2027). É a forma oficial de M2 máis recente publicada polo DEMRE.

Duración: 2 horas e 20 minutos **Calculadora:** non (prohibidos calculadoras e dispositivos electrónicos)

Estrutura e cualificación: 55 preguntas de escolla múltiple (cada unha con 4 ou 5 opcións e unha única resposta correcta), das cales 50 contan para a puntuación final. As respostas incorrectas non descontan. A puntuación exprésase na escala PAES (100–1000 puntos).

Contexto: En Chile o acceso ás universidades do Sistema de Acceso á Educación Superior faise mediante a PAES, elaborada e aplicada polo DEMRE (Departamento de Evaluación, Medición y Registro Educacional, Universidade de Chile). A proba de Competencia Matemática 1 (M1) é obrigatoria; a M2, de nivel máis avanzado (inclúe contidos de 3.º e 4.º medio), é un requisito para carreiras científicas, de enxeñaría e economía en moitas universidades. Hai unha convocatoria regular (novembro–decembro) e unha de inverno (xuño).

Fonte: <https://demre.cl/publicaciones/2027/2027-26-06-15-paes-invierno-competencia-matematica2-p2027>

(PDF: <https://demre.cl/publicaciones/pdf/2027-26-06-15-paes-invierno-oficial-matematica2-p2027.pdf>)

[Nota: Non se reproduce o enunciado. O folleto oficial do DEMRE leva o aviso «Está prohibida la reproducción, transmisión total o parcial de este folleto, por cualquier medio o método» (Registro de Propiedad Intelectual da Universidade de Chile) e prohibe expresamente o seu uso con ferramentas de intelixencia artificial. Por respecto a esa condición, non se inclúe a tradución. O folleto completo (55 preguntas) pódese consultar e descargar de balde na ligazón oficial indicada na ficha.]

Contidos. A M2 abrangue números, álgebra e funcións, xeometría e probabilidade e estatística, con contidos de 3.º e 4.º medio engadidos aos da M1 (véxase o temario oficial do DEMRE). Todas as preguntas son de escolla múltiple; non hai cálculo diferencial nin integral nin álgebra matricial, a diferenza da PAU galega.

20 México

PISA 2025, matemáticas: 388 puntos

Dificultade relativa estimada: 2,5/10 (posto 24 dos 25 exames analizados; PAU de Galiza = 5; baseada en só 4 reactivos)

Exame: reactivos (ítems) de exemplo oficiais do EXANI-II (CENEVAL): área de Pensamento matemático e módulos específicos de Cálculo diferencial e integral, Probabilidade e estatística e Aritmética — *NON é un exame completo nin equivalente a Matemáticas II*

Nome orixinal: *Examen Nacional de Ingreso a la Educación Superior (EXANI-II)*, Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior (Ceneval); *Guía para el sustentante EXANI-II* (xuño de 2025) e guías dos *Módulos de conocimientos disciplinares específicos* (Ceneval, 2021–2022)

Ano e convocatoria: guía de 2025 (versión vixente do exame); non se publican exames aplicados

Duración: 4 h 30 min para todo o EXANI-II **Calculadora:** só calculadora básica

Estrutura e cualificación: EXANI-II: 168 reactivos de escolla múltiple con 3 opcións: Pensamento matemático (30), Comprensión lectora (30), Redacción indirecta (30), dous módulos de coñecementos disciplinares escollidos pola institución (24 + 24) e Inglés (30, diagnóstico). O Pensamento matemático divídese en «Comprensión do matemático» (18 reactivos: sentido numérico, estimación, conexións) e «Matematización» (12: linguaxe matemática, desenvolvemento de usos, resignificacións). Cada módulo matemático ten 24 reactivos (p. ex. Cálculo: 12 de cálculo diferencial e 12 de cálculo integral).

Contexto: México non ten unha selectividade nacional única: cada institución decide o seu proceso. O EXANI-II do Ceneval (asociación civil) úsano moitas universidades públicas estatais e tecnolóxicos como exame de admisión, combinando os módulos que cada institución escolle. A UNAM, a maior universidade do país, aplica o seu propio «examen de selección» (120 reactivos de escolla múltiple con 4 opcións, uns 3 horas, con contidos distintos segundo a área de coñecemento), pero nin os exames aplicados nin a súa guía oficial son públicos: a guía só se descarga desde o portal persoal do aspirante despois de pagar a inscrición. Por iso aquí se traducen os únicos reactivos de matemáticas reais publicados oficialmente e en aberto: os exemplos das guías do Ceneval (un por guía, con resposta e xustificación).

Fontes: <https://ceneval.edu.mx/exani-ii/>; guía do sustentante (xuño 2025): https://www.uanl.mx/wp-content/uploads/2019/02/EXANI-II_Guia-para-el-sustentante.pdf; módulo de Cálculo: https://ceneval.edu.mx/wp-content/uploads/2023/03/4_Modulos-especificos-del-EXANI-II_Calculo-diferencial-e-integral.pdf; módulos (Ceneval, maio 2021): https://ingreso.uady.mx/licenciatura/docs/GuiaModulosEXANI_II_2022.pdf; UNAM: <https://www.excelsior.com.mx/nacional/unam-opero-examen-virtual-con-matriz-hace-15-anos>

Temario de Pensamento matemático (EXANI-II, guía de 2025)

- **Comprensión do matemático** (18 reactivos). *Conexións:* razóns, proporcións, interpretación gráfica, eixes de simetría, estimación de traxectorias, frecuencias, probabilidade. *Estimación:* leis dos expoñentes, porcentaxe, unidades de medida, espazo mostral. *Sentido numérico:* inecuacións, simplificación alxébrica, razóns trigonométricas, área, desviación típica, media aritmética.
- **Matematización** (12 reactivos). *Desenvolvemento de usos:* gráficas de ecuacións de segundo grao, comportamento cuadrático, relacións trigonométricas, gráficas informativas, medidas de tendencia central. *Linguaxe matemática:* polinomios, sistemas de ecuacións lineares. *Resignificacións:* variación linear tabular, medidas de posición (decís, cuartís, percentís).

Temarios dos módulos específicos de matemáticas

- **Cálculo diferencial e integral** (24). *Cálculo diferencial* (12): límites, propiedades dos límites, límites de funcións polinómicas; a derivada, derivada pola definición, derivadas de funcións trigonométricas, exponenciais e logarítmicas; recta tanxente; aplicacións físicas (velocidade instantánea, distancia, razón de cambio, optimización). *Cálculo integral* (12): a integral, partición de funcións, manipulación alxébrica e aritmética, propiedades da integral, métodos de integración, aplicacións da integral definida (área, volume, movemento).
- **Probabilidade e estatística** (24). *Estatística* (12): fundamentos (poboación, mostra e tipos de variábeis), frecuencias e as súas representacións, medidas descritivas. *Probabilidade* (12): elementos (conxuntos e sucesos), cálculo da probabilidade, distribucións.
- **Aritmética** (24). *Principios dos números reais* (14): leis dos signos, leis dos expoñentes, xerarquía das operacións, múltiplos e divisores. *Problemas con números racionais* (10): razóns, variacións.

Reactivos de exemplo

1. **[Pensamento matemático]** Cal é o resultado da operación $B + 2C - A$ se se consideran os seguintes polinomios?

$$A = x - 3, \quad B = 3x^3 - x^2, \quad C = -4x^2 + 2x$$

- (A) $3x^3 - 9x^2 + 3x + 3$
 (B) $3x^3 - 9x^2 + x + 3$
 (C) $3x^3 - 9x^2 - 5x + 3$

[Nota: Resposta correcta segundo a guía: A.]

2. **[Módulo de Cálculo diferencial e integral]** Determina o resultado da operación $f'(30^\circ) + g'(60^\circ)$ das derivadas das funcións

$$f(x) = 3 \cot x, \quad g(x) = 5 \tan x.$$

- (A) 4
 (B) 8
 (C) 32

Xustificacións da guía:

- A) Obtén correctamente a derivada de cada función e substitúe correctamente o valor de x en cada función, así como as relacións trigonométricas. Porén, non ten en conta que a función resultante da derivada e a súa identidade trigonométrica están ao cadrado.
- B) (Correcta.) Obtén adecuadamente a derivada de cada unha das funcións e, ademais, substitúe o valor que corresponde a x en cada función despois da derivación; así mesmo, aplica as identidades trigonométricas $\csc^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ e $\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- C) Omite o signo da derivada da cotanxente, deixándoo positivo: $3 \csc^2 x + 5 \sec^2 x$.

3. **[Módulo de Probabilidade e estatística]** Calcula a media dos seguintes datos:

15, 22, 13, 17, 12, 16, 21, 22, 11, 26, 23

- (A) 16
 (B) 17

(C) 18

Xustificacións da guía (resumidas): A) suma os valores omitindo un dos 22 repetidos (176) e divide entre 11; B) confunde a media coa mediana (ordena os datos e toma o valor central); C) correcta: a suma é 198 e, dividida entre os 11 datos, dá 18.

4. [Módulo de Aritmética] Resolve a operación

$$-9\{9 - [(-8) \div (-4)] + 9 - 6\}$$

(A) -90

(B) -19

(C) 1

Xustificacións da guía (resumidas): A) correcta: respectando a xerarquía das operacións, $-9\{9 - [+2] + 9 - 6\} = -9\{10\} = -90$; B) non respecta a xerarquía ao final e suma os dous últimos números sen multiplicar; C) falla ao eliminar os signos de agrupación e suma en vez de multiplicar.

Solucións**Exercicio 1.**

$$B + 2C - A = (3x^3 - x^2) + (-8x^2 + 4x) - (x - 3) = 3x^3 - 9x^2 + 3x + 3.$$

As opcións (B) e (C) só difiren no termo en x , que é $4x - x = 3x$. **Resposta: (A)**, que coincide coa clave da guía.

Exercicio 2. $f'(x) = -3 \csc^2 x = -\frac{3}{\sin^2 x}$ e $g'(x) = 5 \sec^2 x = \frac{5}{\cos^2 x}$. Como $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ e $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$,

$$f'(30^\circ) + g'(60^\circ) = -3 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = -12 + 20 = \boxed{8}.$$

(Esquecer os cadrados daría $-6 + 10 = 4$, opción A; esquecer o signo daría $12 + 20 = 32$, opción C.) **Resposta: (B)**, que coincide coa clave da guía.

Exercicio 3. A suma dos 11 datos é $15 + 22 + 13 + 17 + 12 + 16 + 21 + 22 + 11 + 26 + 23 = 198$, logo a media é $\bar{x} = 198/11 = \boxed{18}$. (A mediana, en cambio, é 17, e omitir un 22 daría $176/11 = 16$.) **Resposta: (C)**, que coincide coa clave da guía.

Exercicio 4. Primeiro o corchete: $(-8) \div (-4) = 2$. Despois as chaves: $9 - 2 + 9 - 6 = 10$. Finalmente $-9 \cdot 10 = \boxed{-90}$. **Resposta: (A)**, que coincide coa clave da guía.

21 Arxentina

PISA 2025, matemáticas: 367 puntos

Dificultade relativa estimada: 2/10 (posto 25 dos 25 exames analizados; PAU de Galiza = 5)

Exame: exame de Matemática do curso de ingreso ATI 2 da Universidad Nacional del Sur (UNS, Bahía Blanca), Comisión M, Tema I — *NON é un exame nacional nin equivalente a Matemáticas II*

Nome orixinal: *UNS — Curso ATI 2 — Matemática — Comisión M. Recuperatorio — 23/08/2025 — Tema I* (ATI: *Acompañamiento a las Trayectorias Iniciales de Matemática*)

Ano e convocatoria: 2025; proba de recuperación do 23 de agosto de 2025 (curso anticipado para os ingresantes de 2026)

Duración: non indicada **Calculadora:** non indicado

Estrutura e cualificación: 4 exercicios, 100 puntos: exercicio 1 de escolla múltiple (4 apartados $\times$ 5 puntos), exercicio 2 (2×15), exercicio 3 ($12 + 12 + 10$) e exercicio 4 (16). Resposta desenvolvida, agás no exercicio 1.

Contexto: Arxentina non ten ningún exame nacional de acceso á universidade: nas universidades públicas o ingreso é, por lei, libre e gratuíto (Lei de Educación Superior, reformada en 2015), e cada universidade organiza cursos de ingreso, nivelación ou de primeiro ano. Na UBA, por exemplo, o primeiro ano é o Ciclo Básico Común (CBC), cuxa Matemática (51) inclúe límites, derivadas e integrais; noutras universidades (UTN, UNLP, UNC...) hai cursos de nivelación con avaliación propia, e o Instituto Balseiro ten un exame de ingreso de nivel universitario. Escolleuse este exame da UNS por ser real, oficial, recente e publicado pola propia universidade. Os seus contidos (aritmética, álgebra, funcións lineais e cuadráticas, trigonometría) corresponden a un nivel de ESO/1.º de Bacharelato, moi por debaixo de Matemáticas II (sen cálculo, álgebra linear, xeometría no espazo nin probabilidade).

Fonte: <https://www.matematica.uns.edu.ar/default.php?boton=ing> (exames anteriores); PDF: <https://www.matematica.uns.edu.ar/ingresantes/antiores/2025/2025%20-%20ATI%20%20-%20Recuperatorio%20M%20-%20Tema%20I.pdf>

Instrucións

Apelidos e nomes: DNI n.º

Ao final: «Indica o número de follas entregadas, sen contar a dos enunciados: Asina a última folla.»

Enunciados

1. Marca cun X a opción correcta. En cada apartado hai unha única resposta correcta.

- (a) **(5 puntos)** Cal das seguintes expresións é equivalente á expresión $\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$ para $x \neq 2, -2$?

(A) $\frac{x + 3}{x - 2}$

(B) $\frac{x - 3}{x - 2}$

(C) $1 + \frac{1}{x + 2}$

(D) Ningunha das anteriores.

- (b) **(5 puntos)** Cal das seguintes afirmacións é verdadeira acerca do polinomio $P(x)$ dado?

$$P(x) = 3x^5 - 6x^4 - x^3 + 3x^2 - x - 2$$

- (A) 2 é raíz do polinomio.
(B) O seu coeficiente principal é -2 .
(C) O seu termo independente é 3.
(D) Ningunha das anteriores.
- (c) **(5 puntos)** Dados os números $a = 3,15 \times 10^{-4}$, $b = 63 : 2000$ e $c = 31,5 : 10\,000$, cal das seguintes afirmacións é verdadeira?
(A) $a < b < c$
(B) $a < c < b$
(C) $b < c < a$
(D) Ningunha das anteriores.
- (d) **(5 puntos)** Comprei unha hamburguesa cunha promoción do 40 % de desconto e paguei \$ 14.100 (pesos arxentinos). Canto me custaría a hamburguesa se non me fixesen o desconto?
(A) \$ 19.740
(B) \$ 23.500
(C) \$ 35.250
(D) Ningunha das anteriores.

2.

- (a) **(15 puntos)** Simplifica ao máximo a seguinte expresión:

$$\left(x + \frac{3x}{x-3}\right) \cdot \left(\frac{2x^2-9}{x^2-9} - 1\right)^{-1}$$

- (b) **(15 puntos)** Determina o dominio da función $f(x) = \sqrt{1 - \frac{x+3}{3-x}}$ e exprésao utilizando a notación de intervalos.

3.

- (a) **(12 puntos)** Determina a ecuación da parábola con vértice en $V = (4, -3)$ que pasa polo punto $(1, 1)$ e represéntaa graficamente.
- (b) **(12 puntos)** Determina a ecuación da recta que pasa polo punto $A = (6, 4)$ e é perpendicular á recta que pasa polos puntos $B = (2, 2)$ e $C = (-4, -7)$.
- (c) **(10 puntos)** Colocáronse baldosas cerámicas no chan dun salón rectangular. O longo mide 3 m máis có ancho. O prezo das baldosas é de \$ 15.000 por m^2 e gastáronse en total \$ 600.000. Cales son as dimensións (longo e ancho) do salón?
4. **(16 puntos)** Dado o triángulo rectángulo da figura e sabendo que a súa hipotenusa mide 75 cm e que o ángulo $\hat{C}$ mide 28° , calcula a lonxitude dos catetos e a área do triángulo.

[Nota: Na figura: triángulo rectángulo coa hipotenusa (75 cm) e o ángulo $\hat{C} = 28^\circ$ sinalados.]

Solucións

Exercicio 1. a) Factorizando, $x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$ e $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$; para $x \neq \pm 2$,

$$\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{x+3}{x+2} = \frac{(x+2)+1}{x+2} = 1 + \frac{1}{x+2}.$$

As opcións (a) e (b) non son equivalentes: en $x = 1$ a expresión vale $\frac{4}{3}$, mentres que (a) dá -4 e (b) dá 2 . **Resposta: (c).**

b) $P(2) = 3 \cdot 32 - 6 \cdot 16 - 8 + 3 \cdot 4 - 2 - 2 = 96 - 96 - 8 + 12 - 4 = 0$, logo 2 é raíz (de feito, $P(x) = (x - 2)(3x^4 - x^2 + x + 1)$). O coeficiente principal é 3 e o termo independente -2 , así que (b) e (c) son falsas. **Resposta: (a).**

c) $a = 3,15 \times 10^{-4} = 0,000315$; $b = 63 : 2000 = 0,0315 = 3,15 \times 10^{-2}$; $c = 31,5 : 10\,000 = 0,00315 = 3,15 \times 10^{-3}$. Polo tanto $a < c < b$. **Resposta: (b).**

d) Cun desconto do 40% págase o 60% do prezo p : $0,6p = 14\,100 \Rightarrow p = 14\,100/0,6 = 23\,500$. **Resposta: (b)** (\$23.500).

Exercicio 2. a) Para $x \neq 0, \pm 3$ (valores para os que a expresión está definida):

$$x + \frac{3x}{x-3} = \frac{x^2 - 3x + 3x}{x-3} = \frac{x^2}{x-3}, \quad \frac{2x^2 - 9}{x^2 - 9} - 1 = \frac{2x^2 - 9 - x^2 + 9}{x^2 - 9} = \frac{x^2}{x^2 - 9}.$$

Logo

$$\frac{x^2}{x-3} \cdot \frac{x^2 - 9}{x^2} = \frac{x^2}{x-3} \cdot \frac{(x-3)(x+3)}{x^2} = \boxed{x+3}, \quad x \neq 0, 3, -3.$$

(O valor $x = 0$ exclúese porque anula o factor que se inverte.)

b) Hai que esixir $x \neq 3$ e $1 - \frac{x+3}{3-x} \geq 0$. Operando,

$$1 - \frac{x+3}{3-x} = \frac{3-x-x-3}{3-x} = \frac{-2x}{3-x} = \frac{2x}{x-3} \geq 0.$$

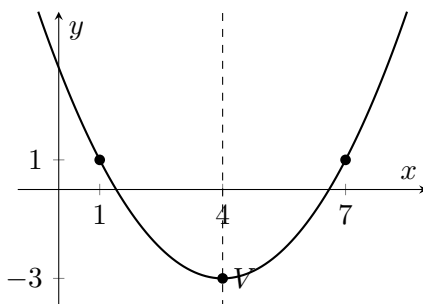
O cociente anúlase en $x = 0$ e cambia de signo en $x = 0$ e $x = 3$: é positivo en $(-\infty, 0)$, negativo en $(0, 3)$ e positivo en $(3, +\infty)$. Así,

$$\boxed{\text{Dom } f = (-\infty, 0] \cup (3, +\infty)}.$$

Exercicio 3. a) Unha parábola de eixe vertical con vértice $(4, -3)$ é $y = a(x-4)^2 - 3$. Ao pasar por $(1, 1)$: $1 = 9a - 3 \Rightarrow a = \frac{4}{9}$. Polo tanto

$$\boxed{y = \frac{4}{9}(x-4)^2 - 3 = \frac{4}{9}x^2 - \frac{32}{9}x + \frac{37}{9}}.$$

Abre cara a arriba, eixe $x = 4$, corta o eixe OY en $(0, \frac{37}{9})$ e o eixe OX en $x = 4 \pm \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 1,40$ e $6,60$; pasa tamén polo simétrico $(7, 1)$.



b) A pendente da recta BC é $m_{BC} = \frac{-7-2}{-4-2} = \frac{3}{2}$, así que a perpendicular ten pendente $-\frac{2}{3}$. Pasando por $A = (6, 4)$: $y - 4 = -\frac{2}{3}(x - 6)$, é dicir,

$$\boxed{y = -\frac{2}{3}x + 8} \quad (\text{ou } 2x + 3y - 24 = 0).$$

c) Superficie: $600\,000/15\,000 = 40 \text{ m}^2$. Se o ancho é x , o longo é $x + 3$ e $x(x + 3) = 40 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 40 = 0 \Leftrightarrow (x + 8)(x - 5) = 0$. Descartando $x = -8$, $x = 5$. **Resposta:** ancho 5 m e longo 8 m .

Exercicio 4. [Nota: Supoñemos o ángulo recto non está en C (pois $\hat{C} = 28^\circ$), de modo que $\hat{C}$ é un dos ángulos agudos. Os resultados non dependen do nome dos vértices.]

O cateto oposto a $\hat{C}$ e o contiguo a $\hat{C}$ valen

$$\text{oposto} = 75 \sen 28^\circ \approx \boxed{35,21 \text{ cm}}, \quad \text{contiguo} = 75 \cos 28^\circ \approx \boxed{66,22 \text{ cm}}.$$

(Comprobación: $35,21^2 + 66,22^2 \approx 75^2$.) A área é

$$S = \frac{1}{2} \cdot 75 \sen 28^\circ \cdot 75 \cos 28^\circ = \frac{75^2}{4} \sen 56^\circ \approx \boxed{1165,8 \text{ cm}^2}.$$

22 Marrocos

PISA 2025, matemáticas: 355 puntos

Dificultade relativa estimada: 7/10 (posto 4 dos 25 exames analizados; PAU de Galiza = 5)

Exame: Exame nacional unificado do bacharelato (2.º ano de Bac) — Matemáticas, filière Ciencias Matemáticas A e B (opción francesa)

Nome orixinal: *Examen national unifié du baccalauréat — Mathématiques — Filière Sciences Mathématiques (A) et (B), option française* (en árabe: *al-imtiḥān al-waṭanī al-muwahḥad li-l-bakālūryā*, “exame nacional unificado do bacharelato”)

Ano e convocatoria: 2026, sesión ordinaria (*session ordinaire/normale*, xuño de 2026)

Duración: 4 horas **Coeficiente:** 9 **Calculadora:** permítese unha calculadora non programábel

Estrutura e cualificación: catro exercicios independentes, 20 puntos: análise (10 puntos), números complexos (3,5 puntos), aritmética e probabilidade (3 puntos), estruturas alxébricas e matrices (3,5 puntos).

Contexto: O Centre National des Examens Scolaires et de l'Évaluation des Apprentissages (CNEE) organiza o exame nacional, que pesa o 50 % da nota do bacharelato (o exame rexional de 1.º e a avaliación continua achegan o resto). A filière Sciences Mathématiques é o itinerario de maior nivel matemático e o camiño habitual cara ás *classes préparatoires* e ás escolas de enxeñaría. O programa inclúe aritmética e estruturas alxébricas (grupos, aneis, corpos), que non están na PAU galega.

Fonte: <https://mathslycee-hammouboudraa.blogspot.com/2026/06/examen-national-2026-mathematiques-sciences-mathematiques.html>; corrección: <https://mathslycee-hammouboudraa.blogspot.com/2026/06/correction-examen-national-2026-mathematiques-sciences-mathematiques.html>

Instrucións

- A duración da proba é de 4 horas.
- A proba consta de catro exercicios independentes.
- Os exercicios pódense resolver na orde que escolla o candidato.
- Permítese o uso dunha calculadora non programábel.
- Non se permite o uso da cor vermella.

Enunciados

Exercicio 1

(10 puntos)

Parte I

1-a) Demostra que: $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 + x \leq e^x$. (0,25 pt)

b) Deduce que: $\forall x \in [0, +\infty[, \quad \frac{x^2}{2} + 1 + x \leq e^x$. (0,25 pt)

2) Para todo $x \in [0, +\infty[$, considérase

$$I(x) = \int_0^x t e^{-t} dt.$$

2-a) Demostra que: $\forall x \in [0, +\infty[, \quad I(x) \leq \frac{x^2}{2}$. (0,25 pt)

b) Demostra que: $\forall x \in [0, +\infty[, \quad I(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + 1.$ (0,5 pt)

3) Sexa g a función definida en $]0, +\infty[$ por $g(x) = \frac{e^x - x - 1}{x^2}.$

3-a) Utilizando os resultados das preguntas 1-b) e 2-b) da parte I, demostra que:

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \frac{1}{2} \leq g(x) \leq \frac{e^x}{2}.$$

(0,5 pt)

b) Deduce que: $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \frac{1}{2}.$ (0,25 pt)

Parte II Sexa f a función numérica de variábel real x definida en $[0, +\infty[$ por:

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = \frac{x}{e^x - e^{-x}}, \quad f(0) = \frac{1}{2}.$$

Sexa (C) a curva representativa da función f nun sistema de referencia ortonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e despois interpreta graficamente o resultado obtido. (0,5 pt)

2) Demostra que f é continua pola dereita en 0. (0,25 pt)

3-a) Demostra que:

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \frac{f(x) - f(0)}{x} = -e^{-x} f(x) \left(\frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2x^2} \right).$$

(0,25 pt)

b) Demostra que:

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2x^2} = 2g(2x) - \frac{e^x - 1}{x}.$$

(0,25 pt)

c) Deduce que f é derivábel pola dereita en 0 e que $f'_d(0) = 0.$ (0,25 pt)

4) Para todo $x \in [0, +\infty[,$ considérase $J(x) = \int_0^x t e^t dt.$

4-a) Demostra que: $\forall x \in [0, +\infty[, \quad 0 \leq I(x) \leq J(x).$ (0,5 pt)

b) Demostra que: $\forall x \in [0, +\infty[, \quad J(x) = (x - 1)e^x + 1.$ (0,25 pt)

c) Demostra que:

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f'(x) = \frac{I(x) - J(x)}{(e^x - e^{-x})^2}.$$

(0,5 pt)

d) Deduce o sentido de variación da función f en $[0, +\infty[.$ (0,25 pt)

5) Demostra que a función f é unha bixección de $[0, +\infty[$ nun intervalo que se debe determinar. Denótase por f^{-1} a bixección recíproca da función $f.$ (0,25 pt)

6-a) Demostra que a ecuación $f(x) = x$ admite unha única solución α en $[0, +\infty[,$ que se debe determinar. (0,5 pt)

- b) Representa graficamente a curva (C) e a curva (C') da función f^{-1} no sistema de referencia ortonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Tómesse $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$ cm. Admítese que o punto $P(x_0, f(x_0))$ é un punto de inflexión da curva (C) , con $x_0 \simeq 1,6$ e $f(x_0) \simeq 0,3$. **(0,5 pt)**

7) Considérase a sucesión $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $u_0 = 0$ e $u_{n+1} = f(u_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

7-a) Demostra que: $(\forall n \in \mathbb{N}), \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$. **(0,25 pt)**

b) Demostra que: $(\forall n \in \mathbb{N}), \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$.
(Admítese que: $\forall x \in]0, +\infty[, \quad -\frac{1}{2} < f'(x) < 0$.) **(0,5 pt)**

c) Demostra por indución que: $(\forall n \in \mathbb{N}), \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. **(0,5 pt)**

d) Deduce que a sucesión $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a α . **(0,25 pt)**

Parte III Considérase a función F definida en $[0, +\infty[$ por:

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt.$$

1-a) Demostra que: $\forall x \in [0, +\infty[, \quad 0 \leq F(x) \leq x f(x)$. **(0,5 pt)**

b) Deduce $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. **(0,25 pt)**

c) Interpreta graficamente o resultado obtido. **(0,25 pt)**

2-a) Demostra que F é derivábel en $]0, +\infty[$. **(0,25 pt)**

b) Demostra que:

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad F'(x) = \frac{-f(x)}{e^{2x} + 1} (e^{2x} - 4e^x + 1).$$

(0,5 pt)

c) Demostra que $F(\ln(2 + \sqrt{3}))$ é un extremo da función F en $[0, +\infty[$. **(0,5 pt)**

Exercicio 2

(3,5 puntos)

Sexa o número complexo $m = \sqrt{2} e^{i\theta}$, onde $\theta \in \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Parte I Considérase, no conxunto dos números complexos $\mathbb{C}$, a ecuación (E_m) de incógnita z :

$$(E_m): \quad \overline{m} z^2 - 2z + m = 0.$$

1) Dado que o número complexo $z_1 = \frac{m(1-i)}{2}$ é unha solución da ecuación (E_m) , deduce que a súa segunda solución é $z_2 = \frac{m(1+i)}{2}$. **(0,25 pt)**

2) Escribe z_1 en forma exponencial. **(0,25 pt)**

Parte II No plano complexo, dotado dun sistema de referencia ortonormal directo $(O, \vec{u}, \vec{v})$, considéranse os puntos A, B, M, M_1 e M_2 , de afixos respectivos $a = 1, b = -1, m, z_1$ e z_2 . Sexa R o xiro de centro O e ángulo $\frac{\pi}{2}$.

- 1) Demostra que $R(M_1) = M_2$. (0,25 pt)
- 2-a) Demostra que $(MM_1) \perp (OM_1)$ e $(MM_2) \perp (OM_2)$. (0,5 pt)
- b) Comproba que $OM_1 = OM_2 = 1$. (0,25 pt)
- c) Determina a natureza do cuadrilátero OM_1MM_2 . (0,25 pt)
- 3) Sexa H o punto de afixo $h = \frac{-i}{\sqrt{2} \sin \theta} e^{2i\theta}$.
- 3-a) Demostra que $\operatorname{Re}(m - \bar{h}) = 0$ e $\operatorname{Re}(1 - h\bar{m}) = 0$. (0,5 pt)
- b) Demostra que $\operatorname{Re}\left(\frac{a - h}{m + 1}\right) = 0$. (0,25 pt)
- c) Deduce que $(MH) \perp (AB)$ e $(AH) \perp (MB)$. (0,5 pt)
- 4-a) Demostra que $\frac{h - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{1}{2}(1 - \cotan(\theta))$. (0,25 pt)
- b) Deduce que os puntos H, M_1 e M_2 están aliñados. (0,25 pt)

Exercicio 3 (3 puntos)

Parte I A. Considérase en $\mathbb{Z}^2$ a seguinte ecuación:

$$(F) : \quad 5u - 9v = 1.$$

- 1) Dá unha solución particular $(u_0, v_0) \in \mathbb{N}^2$ de (F) . (0,25 pt)
- 2) Determina o conxunto das solucións da ecuación (F) . (0,25 pt)
- 3) Comproba que $5^{u_0} \equiv 6 \pmod{19}$. (0,25 pt)

B. Considérase en $\mathbb{Z}^*$ a seguinte ecuación:

$$(E) : \quad x^{2026} \equiv 5 \pmod{19}.$$

Sexa x unha solución da ecuación (E) .

- 1-a) Demostra que x e 19 son primos entre si e que $x^{18} \equiv 1 \pmod{19}$. (0,5 pt)
- b) Demostra que $x^{10} \equiv 5 \pmod{19}$. (0,25 pt)
- c) Deduce que $x^2 \equiv 6 \pmod{19}$. (Pódense utilizar os resultados da parte A.) (0,25 pt)
- d) Demostra que $x \equiv 5 \pmod{19}$ ou $x \equiv -5 \pmod{19}$. (0,25 pt)
- 2) Demostra que, se $x \equiv 5 \pmod{19}$ ou $x \equiv -5 \pmod{19}$, entón x é solución da ecuación (E) . (0,5 pt)

Parte II Considérase unha urna que contén 100 bólas numeradas do 1 ao 100, indistinguíbeis ao tacto. Extráese unha bóla ao chou desta urna. Considérase o suceso

V : «o número da bóla extraída é solución da ecuación (E) ».

- 1) Demostra que a probabilidade do suceso V é $p = 0,11$. (0,25 pt)
- 2) Sexa $n \in \mathbb{N}^*$. Realízanse n extraccións sucesivas con reposición da bóla na urna. Determina o valor mínimo de n para que a probabilidade de que o suceso V se realice polo menos unha vez sexa estritamente maior que 0,95. (0,25 pt)

Exercicio 4

(3,5 puntos)

Lémbrese que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ é un anel unitario e non conmutativo, cuxo cero é a matriz $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e cuxa unidade é a matriz $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Considérase o conxunto

$$E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 1-x & x \\ x^2+2x & -x & x+1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}.$$

- 1) Demostra que: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad M(x) \times M(y) = M(x+y)$. (0,5 pt)
- 2) Considérase a aplicación φ definida de $\mathbb{R}$ en $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ por: $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = M(x)$.
- 2-a) Demostra que φ é un homomorfismo de $(\mathbb{R}, +)$ en $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$ e que $\varphi(\mathbb{R}) = E$. (0,5 pt)
- b) Deduce que $(E, \times)$ é un grupo conmutativo. (0,25 pt)
- 3) Dótase E da lei de composición interna T definida por: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad M(x) T M(y) = M(2xy)$.
- 3-a) Demostra que $(E - \{I\}, T)$ é un grupo conmutativo. (0,75 pt)
- b) Demostra que $(E, \times, T)$ é un corpo conmutativo. (0,5 pt)
- 4) Sexa $x \in \mathbb{R}$. Considérase $(M(x))^n = \underbrace{M(x) \times M(x) \times \cdots \times M(x)}_{n \text{ veces}}$, con $n \in \mathbb{N}^*$.
- 4-a) Demostra que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*), \quad (M(x))^n = M(nx)$. (0,5 pt)
- b) Resolve en E a ecuación

$$X^3 - X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(0,5 pt)

Solucións

Exercicio 1. Parte I.

1-a) Sexa $\varphi(x) = e^x - 1 - x$ en $\mathbb{R}$: $\varphi'(x) = e^x - 1$, negativa en $] -\infty, 0[$ e positiva en $]0, +\infty[$. Así φ ten un mínimo absoluto en 0, con $\varphi(0) = 0$, e $\boxed{1 + x \leq e^x}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

b) Sexa $\psi(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ en $[0, +\infty[$. Entón $\psi'(x) = e^x - 1 - x = \varphi(x) \geq 0$ por 1-a). Logo ψ é crecente e $\psi(x) \geq \psi(0) = 0$, é dicir, $\boxed{\frac{x^2}{2} + 1 + x \leq e^x}$ para $x \geq 0$.

2-a) Para $t \geq 0$ tense $e^{-t} \leq 1$, así que $0 \leq te^{-t} \leq t$. Integrando en $[0, x]$ (con $x \geq 0$): $I(x) \leq \int_0^x t dt = \boxed{\frac{x^2}{2}}$.

b) Por partes, con $u = t$ e $v' = e^{-t}$ ($u' = 1$, $v = -e^{-t}$):

$$I(x) = [-te^{-t}]_0^x + \int_0^x e^{-t} dt = -xe^{-x} + [-e^{-t}]_0^x = \boxed{-xe^{-x} - e^{-x} + 1}.$$

3-a) Sexa $x > 0$. Por 1-b), $e^x - x - 1 \geq \frac{x^2}{2}$; dividindo por $x^2 > 0$, $g(x) \geq \frac{1}{2}$. Por 2-a) e 2-b), $1 - xe^{-x} - e^{-x} \leq \frac{x^2}{2}$. Multiplicando por $e^x > 0$: $e^x - x - 1 \leq \frac{x^2 e^x}{2}$, e dividindo por x^2 : $g(x) \leq \frac{e^x}{2}$. Así, $\boxed{\frac{1}{2} \leq g(x) \leq \frac{e^x}{2}}$.

b) Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$, polo teorema do encaixe (dos *xendarmes*) $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \frac{1}{2}}$.

Parte II.

1) Para $x > 0$, $f(x) = \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-2x}}$. Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-2x}) = 1$, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$.

Interpretación: a recta $y = 0$ (eixe de abscisas) é asíntota horizontal de (C) en $+\infty$.

2) Para $x > 0$, $e^x - e^{-x} = e^{-x}(e^{2x} - 1)$, logo

$$f(x) = \frac{xe^x}{e^{2x} - 1} = \frac{e^x}{2 \cdot \frac{e^{2x} - 1}{2x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2} = f(0),$$

porque $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$ (derivada de e^u en 0). Polo tanto f é continua pola dereita en 0.

3-a) Para $x > 0$:

$$\frac{f(x) - \frac{1}{2}}{x} = \frac{2x - (e^x - e^{-x})}{2x(e^x - e^{-x})}.$$

Por outra banda,

$$-e^{-x} f(x) \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2x^2} = -\frac{x}{e^x - e^{-x}} \cdot \frac{e^{-x}(e^{2x} - 2xe^x - 1)}{2x^2} = -\frac{e^x - 2x - e^{-x}}{2x(e^x - e^{-x})},$$

que é a mesma expresión.

b) $2g(2x) = \frac{2(e^{2x} - 2x - 1)}{4x^2} = \frac{e^{2x} - 2x - 1}{2x^2}$ e $\frac{e^x - 1}{x} = \frac{2xe^x - 2x}{2x^2}$. Restando:

$$2g(2x) - \frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^{2x} - 2x - 1 - 2xe^x + 2x}{2x^2} = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2x^2}.$$

c) Cando $x \rightarrow 0^+$: $e^{-x} \rightarrow 1$, $f(x) \rightarrow \frac{1}{2}$ (apartado 2), $g(2x) \rightarrow \frac{1}{2}$ (I-3-b) e $\frac{e^x - 1}{x} \rightarrow 1$. Polo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{2} - 1\right) = 0,$$

é dicir, f é derivábel pola dereita en 0 e $\boxed{f'_d(0) = 0}$.

4-a) Para $t \geq 0$, $0 \leq te^{-t} \leq te^t$ (porque $e^{-t} \leq 1 \leq e^t$). Integrando en $[0, x]$, $x \geq 0$: $\boxed{0 \leq I(x) \leq J(x)}$. Ademais, para $t > 0$ a desigualdade $te^{-t} < te^t$ é estrita, así que $I(x) < J(x)$ se $x > 0$.

b) Por partes ($u = t$, $v' = e^t$): $J(x) = [te^t]_0^x - \int_0^x e^t dt = xe^x - e^x + 1 = \boxed{(x-1)e^x + 1}$.

c) Para $x > 0$, f é derivábel como cociente de funcións derivábeis con denominador non nulo:

$$f'(x) = \frac{(e^x - e^{-x}) - x(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2}.$$

E, polas expresións de 2-b) e 4-b),

$$I(x) - J(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + 1 - xe^x + e^x - 1 = (e^x - e^{-x}) - x(e^x + e^{-x}),$$

de onde $\boxed{f'(x) = \frac{I(x) - J(x)}{(e^x - e^{-x})^2}}$.

d) Por 4-a), $I(x) - J(x) < 0$ para $x > 0$, logo $f'(x) < 0$ en $]0, +\infty[$. Como f é continua en 0 pola dereita, f é **estritamente decrecente en** $[0, +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	—
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$ 0

5) f é continua e estritamente decrecente en $[0, +\infty[$, logo é unha bixección de $[0, +\infty[$ sobre

$$f([0, +\infty[) = \left] \lim_{+\infty} f, f(0) \right] = \boxed{\left] 0, \frac{1}{2} \right]}.$$

6-a) $x = 0$ non é solución, pois $f(0) = \frac{1}{2} \neq 0$. Para $x > 0$:

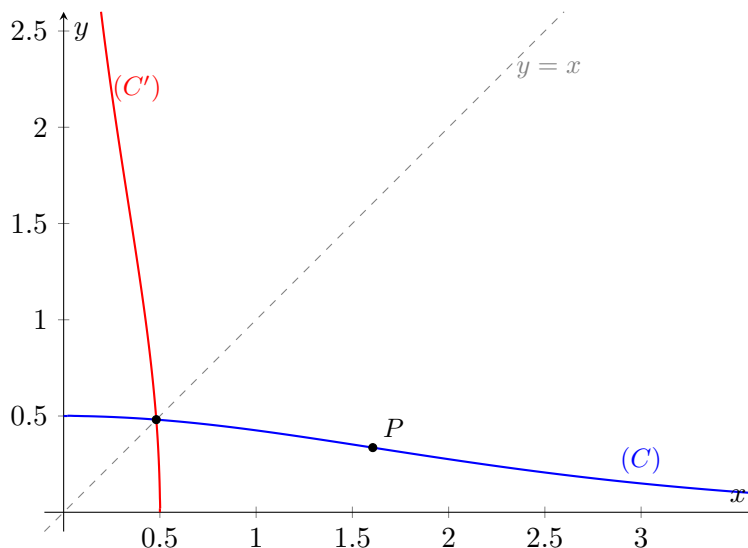
$$f(x) = x \iff \frac{1}{e^x - e^{-x}} = 1 \iff e^x - e^{-x} = 1 \iff (e^x)^2 - e^x - 1 = 0 \iff e^x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

(a outra raíz, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, é negativa). Logo hai unha única solución:

$$\boxed{\alpha = \ln \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,481}.$$

(Tamén se obtén a unicidade sen calcular: $x \mapsto f(x) - x$ é continua e estritamente decrecente, vale $\frac{1}{2}$ en 0 e tende a $-\infty$.)

b) (C') é a simétrica de (C) respecto da recta $y = x$; ambas se cortan no punto (α, α) . (C) parte de $(0, \frac{1}{2})$ con tanxente horizontal, decrece, ten inflexión en $P(1,6; 0,3)$ e ten o eixe OX como asíntota; (C') está definida en $[0, \frac{1}{2}]$, parte de $(\frac{1}{2}, 0)$ con tanxente vertical e ten o eixe OY como asíntota.



7-a) Por indución. $u_0 = 0 \in [0, \frac{1}{2}]$. Se $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$, como f é decrecente en $[0, +\infty[$, $0 < f(\frac{1}{2}) \leq f(u_n) \leq f(0) = \frac{1}{2}$, é dicir, $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$. Logo $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$ para todo n .

b) Se $u_n = \alpha$, é trivial. Se non, f é continua no intervalo pechado de extremos u_n e α e derivábel no seu interior (contido en $]0, +\infty[$). Polo teorema dos incrementos finitos, existe c entre u_n e α con

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| = |f'(c)| |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|,$$

xa que $|f'(c)| < \frac{1}{2}$ e $f(\alpha) = \alpha$.

c) Para $n = 0$: $|u_0 - \alpha| = \alpha \approx 0,481 \leq 1 = (\frac{1}{2})^0$. Se $|u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^n$, por b), $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^n = (\frac{1}{2})^{n+1}$. Logo $|u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^n$ para todo n .

d) Como $0 < \frac{1}{2} < 1$, $(\frac{1}{2})^n \rightarrow 0$; polo encaixe, $|u_n - \alpha| \rightarrow 0$, é dicir, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \alpha = \ln \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Parte III.

1-a) Para $x = 0$, $F(0) = 0$. Para $x > 0$ e $t \in [x, 2x]$, f é positiva e decrecente: $0 < f(t) \leq f(x)$. Integrando en $[x, 2x]$ (de lonxitude x): $0 \leq F(x) \leq xf(x)$.

b) $xf(x) = \frac{x^2 e^{-x}}{1 - e^{-2x}} \rightarrow 0$ cando $x \rightarrow +\infty$ (pois $x^2 e^{-x} \rightarrow 0$). Polo encaixe, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

c) A curva de F ten como asíntota horizontal en $+\infty$ o eixe de abscisas ($y = 0$).

2-a) f é continua en $[0, +\infty[$, logo admite unha primitiva Φ (derivábel, con $\Phi' = f$). Entón $F(x) = \Phi(2x) - \Phi(x)$ é derivábel en $]0, +\infty[$ (de feito en $[0, +\infty[$), como composición e diferenza de funcións derivábeis.

b) $F'(x) = 2f(2x) - f(x)$. Como $e^{2x} - e^{-2x} = (e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})$,

$$2f(2x) = \frac{4x}{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})} = \frac{4f(x)}{e^x + e^{-x}},$$

logo

$$F'(x) = f(x) \frac{4 - e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = f(x) \frac{4e^x - e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{-f(x)}{e^{2x} + 1} (e^{2x} - 4e^x + 1).$$

c) O signo de $F'(x)$ é o de $-(e^{2x} - 4e^x + 1)$, pois $f(x) > 0$. Con $X = e^x > 1$, $X^2 - 4X + 1 = 0 \iff X = 2 \pm \sqrt{3}$; como $2 - \sqrt{3} < 1 < 2 + \sqrt{3}$:

- se $0 < x < \ln(2 + \sqrt{3})$, $X^2 - 4X + 1 < 0$ e $F'(x) > 0$;
- se $x > \ln(2 + \sqrt{3})$, $X^2 - 4X + 1 > 0$ e $F'(x) < 0$.

F é crecente en $[0, \ln(2 + \sqrt{3})]$ e decrecente despois. Polo tanto $F(\ln(2 + \sqrt{3}))$ é o máximo (absoluto) de F en $[0, +\infty[$ (numericamente, $\ln(2 + \sqrt{3}) \approx 1,317$ e $F \approx 0,371$).

Exercicio 2. Parte I.

1) Nunha ecuación de segundo grao $\overline{m}z^2 - 2z + m = 0$ ($\overline{m} \neq 0$), a suma das raíces é $\frac{2}{\overline{m}} = \frac{2m}{|m|^2} = \frac{2\overline{m}}{2} = m$. Logo

$$z_2 = m - z_1 = m - \frac{m(1-i)}{2} = \boxed{\frac{m(1+i)}{2}}.$$

2) $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$, logo $z_1 = \frac{\sqrt{2}e^{i\theta}\sqrt{2}e^{-i\pi/4}}{2} = \boxed{e^{i(\theta-\frac{\pi}{4})}}.$

Parte II.

1) A expresión complexa de R é $z' = iz$. Como $i(1-i) = 1+i$, $iz_1 = \frac{m(1+i)}{2} = z_2$, isto é, $R(M_1) = M_2$.

2-a) $m - z_1 = \frac{m(1+i)}{2} = z_2$ e $m - z_2 = z_1$. Logo

$$\frac{m - z_1}{z_1 - 0} = \frac{z_2}{z_1} = i \in i\mathbb{R}^*, \quad \frac{m - z_2}{z_2 - 0} = \frac{z_1}{z_2} = -i \in i\mathbb{R}^*,$$

de onde $(MM_1) \perp (OM_1)$ e $(MM_2) \perp (OM_2)$.

b) $OM_1 = |z_1| = |e^{i(\theta-\pi/4)}| = 1$ e $OM_2 = |z_2| = |iz_1| = 1$.

c) $\overrightarrow{M_1M}$ ten afixo $m - z_1 = z_2$, que é o afixo de $\overrightarrow{OM_2}$: OM_1MM_2 é un paralelogramo. Ten un ángulo recto en O ($z_2 = iz_1$) e dous lados consecutivos iguais ($OM_1 = OM_2 = 1$): OM_1MM_2 é un cadrado (de lado 1).

3) Escribindo h en forma alxébrica: $h = \frac{-i(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)}{\sqrt{2} \sin \theta} = \sqrt{2} \cos \theta - i \frac{\cos 2\theta}{\sqrt{2} \sin \theta}.$

3-a) $\operatorname{Re}(m - \overline{h}) = \operatorname{Re} m - \operatorname{Re} h = \sqrt{2} \cos \theta - \sqrt{2} \cos \theta = 0$.

$$h\overline{m} = \frac{-ie^{2i\theta}\sqrt{2}e^{-i\theta}}{\sqrt{2} \sin \theta} = \frac{-ie^{i\theta}}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta - i \cos \theta}{\sin \theta} = 1 - i \cot \theta, \text{ logo } 1 - h\overline{m} = i \cot \theta \text{ e } \operatorname{Re}(1 - h\overline{m}) = 0.$$

b) $m + 1 \neq 0$ (pois $|m| = \sqrt{2} \neq 1$) e

$$\frac{a - h}{m + 1} = \frac{(1 - h)(\overline{m} + 1)}{|m + 1|^2}, \quad (1 - h)(\overline{m} + 1) = \overline{m} + (1 - h\overline{m}) - h.$$

A parte real do numerador é $\operatorname{Re} m + \operatorname{Re}(1 - h\overline{m}) - \operatorname{Re} h = \operatorname{Re}(m - \overline{h}) + 0 = 0$. Logo $\operatorname{Re}\left(\frac{a - h}{m + 1}\right) = 0$.

c) Por 3-a), $h - m$ é imaxinario puro e non nulo (se $\operatorname{Im} h = \operatorname{Im} m$ tería que ser $-\cos 2\theta = 2 \sin^2 \theta$, é dicir, $-1 = 0$). Como $b - a = -2 \in \mathbb{R}^*$, $\frac{h - m}{b - a} \in i\mathbb{R}^*$ e $(MH) \perp (AB)$.

Por 3-b), $\frac{a - h}{m - b} = \frac{a - h}{m + 1} \in i\mathbb{R}$; se $h \neq a$ é imaxinario puro non nulo e $(AH) \perp (MB)$. Así, H é o ortocentro do triángulo MAB .

[Nota: Se $\theta \equiv \pm \frac{\pi}{4} [2\pi]$, entón $h = 1 = a$: o triángulo MAB é rectángulo en A e o ortocentro é A ; a recta (AH) non está definida.]

4-a) $z_2 - z_1 = \frac{m}{2}((1+i) - (1-i)) = im$. Entón

$$\frac{h}{im} = \frac{-ie^{2i\theta}}{\sqrt{2} \sin \theta \cdot i\sqrt{2}e^{i\theta}} = -\frac{e^{i\theta}}{2 \sin \theta} = -\frac{\cot \theta}{2} - \frac{i}{2}, \quad \frac{z_1}{im} = \frac{1-i}{2i} = \frac{-1-i}{2},$$

e restando: $\boxed{\frac{h - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{1}{2}(1 - \cot \theta)}.$

b) Ese cociente é real, logo $\overrightarrow{M_1H}$ e $\overrightarrow{M_1M_2}$ son colineais: H , M_1 e M_2 están aliñados (a recta (M_1M_2) é a outra diagonal do cadrado).

Exercicio 3. Parte I. A.

1) $5 \cdot 2 - 9 \cdot 1 = 1$: $\boxed{(u_0, v_0) = (2, 1)}.$

2) Se $5u - 9v = 1 = 5 \cdot 2 - 9 \cdot 1$, entón $5(u - 2) = 9(v - 1)$. Como $5 \wedge 9 = 1$, polo lema de Gauss $9 \mid u - 2$: $u = 2 + 9k$, e entón $v = 1 + 5k$. Reciprocamente, estes pares son solución. Logo

$$\boxed{S = \{(2 + 9k, 1 + 5k) \mid k \in \mathbb{Z}\}}.$$

3) $5^{u_0} = 5^2 = 25 = 19 + 6 \equiv 6 \pmod{19}.$

B.

1-a) Se $19 \mid x$, entón $x^{2026} \equiv 0 \pmod{19}$, e non 5. Logo $19 \nmid x$ e, como 19 é primo, $x \wedge 19 = 1$. Polo pequeno teorema de Fermat, $x^{18} \equiv 1 \pmod{19}$.

b) $2026 = 18 \cdot 112 + 10$, logo $5 \equiv x^{2026} = (x^{18})^{112} x^{10} \equiv x^{10} \pmod{19}.$

c) $(x^{10})^{u_0} = x^{20} = x^{2(5u_0)} = x^{2(1+9v_0)} = x^2 x^{18v_0} \equiv x^2 \pmod{19}$. Por outra banda, $(x^{10})^{u_0} \equiv 5^{u_0} \equiv 6 \pmod{19}$ (A-3). Logo $\boxed{x^2 \equiv 6 \pmod{19}}.$

d) $x^2 \equiv 6 \equiv 25 \pmod{19}$, logo $19 \mid (x - 5)(x + 5)$. Como 19 é primo, divide un dos factores: $x \equiv 5 \pmod{19}$ ou $x \equiv -5 \pmod{19}$.

2) Se $x \equiv \pm 5 \pmod{19}$, entón $x \wedge 19 = 1$, $x^{18} \equiv 1$ e $x^2 \equiv 25 \equiv 6 \pmod{19}$. Así

$$x^{2026} = (x^{18})^{112} x^{10} \equiv (x^2)^5 \equiv 6^5 \pmod{19}.$$

Como $6^2 = 36 \equiv -2$, $6^4 \equiv 4$ e $6^5 \equiv 24 \equiv 5 \pmod{19}$: x é solución de (E) . Conclusión: as solucións de (E) son os $x \in \mathbb{Z}^*$ con $\boxed{x \equiv 5 \pmod{19} \text{ ou } x \equiv 14 \pmod{19}}.$

Parte II.

1) Entre 1 e 100: $x \equiv 5 \pmod{19}$ dá 5, 24, 43, 62, 81, 100 (6 números) e $x \equiv 14 \pmod{19}$ dá 14, 33, 52, 71, 90 (5 números). Hai 11 casos favorábeis de 100 equiprobábeis: $\boxed{p = 0,11}.$

2) As extraccións son independentes. $P(\text{polo menos un } V) = 1 - 0,89^n > 0,95 \iff 0,89^n < 0,05 \iff n > \frac{\ln 0,05}{\ln 0,89} \approx 25,71$. ($0,89^{25} \approx 0,0543$, $0,89^{26} \approx 0,0483$.) O valor mínimo é $\boxed{n = 26}.$

Exercicio 4. 1) Calculando o produto (comprobado tamén simbolicamente):

$$M(x)M(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2 + y^2 + 2xy & 1 - x - y & x + y \\ x^2 + 2x + y^2 + 2y + 2xy & -x - y & x + y + 1 \end{pmatrix} = M(x + y).$$

Por exemplo, o termo $(2, 1)$ é $x^2 + (1 - x)y^2 + x(y^2 + 2y) = x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2$, e o $(2, 2)$ é $(1 - x)(1 - y) - xy = 1 - x - y$.

2-a) Por 1), $\varphi(x + y) = M(x + y) = M(x) \times M(y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$: φ é un homomorfismo de $(\mathbb{R}, +)$ en $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$. Por definición de E , $\varphi(\mathbb{R}) = \{M(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = E$.

b) A imaxe dun grupo por un homomorfismo é un grupo: E é estábel para $\times$ ($M(x)M(y) = M(x + y)$), $\times$ é asociativa, $I = M(0) \in E$ é neutro e $M(x)M(-x) = M(0) = I$, así que $M(-x)$

é o inverso de $M(x)$. Ademais $M(x)M(y) = M(x+y) = M(y)M(x)$. Logo $(E, \times)$ **é un grupo conmutativo**.

3-a) φ é inxectiva (o termo $(2, 3)$ de $M(x)$ é x), así que T está ben definida, e $E - \{I\} = \{M(x) \mid x \neq 0\}$. Sexa $\psi : \mathbb{R}^* \rightarrow E - \{I\}$, $\psi(x) = M(\frac{x}{2})$. É bixectiva e

$$\psi(x) T \psi(y) = M\left(2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{y}{2}\right) = M\left(\frac{xy}{2}\right) = \psi(xy).$$

Logo ψ é un isomorfismo de $(\mathbb{R}^*, \times)$ (grupo conmutativo) sobre $(E - \{I\}, T)$. En particular T é interna en $E - \{I\}$ ($2xy \neq 0$), e $(E - \{I\}, T)$ **é un grupo conmutativo**, de neutro $\psi(1) = M(\frac{1}{2})$; o simétrico de $M(x)$ é $M(\frac{1}{4x})$.

b) $(E, \times)$ é grupo conmutativo de neutro I e $(E - \{I\}, T)$ é grupo conmutativo. Ademais, T é asociativa e conmutativa en todo E ($M(x)T(M(y)TM(z)) = M(4xyz)$) e é distributiva respecto de $\times$:

$$M(x) T (M(y) \times M(z)) = M(2x(y+z)) = M(2xy) \times M(2xz) = (M(x)TM(y)) \times (M(x)TM(z)).$$

Logo $(E, \times, T)$ **é un corpo conmutativo** (de feito, $x \mapsto M(\frac{x}{2})$ é un isomorfismo de corpos de $(\mathbb{R}, +, \times)$ sobre $(E, \times, T)$).

4-a) Por indución: para $n = 1$ é evidente. Se $(M(x))^n = M(nx)$, entón $(M(x))^{n+1} = M(nx) \times M(x) = M((n+1)x)$ por 1).

b) Sexa $X = M(x) \in E$. Por 4-a), $X^3 - X^2 = M(3x) - M(2x)$ (diferenza de matrices):

$$M(3x) - M(2x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5x^2 & -x & x \\ 5x^2 + 2x & -x & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = -1 \\ 5x^2 = 5 \\ 5x^2 + 2x = 3 \end{cases} \iff x = -1.$$

Solución única:

$$X = M(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Países sen datos en PISA 2025

Rusia, Irán, Alxeria e Camerún non participaron no ciclo PISA 2025, pero teñen exames de acceso á universidade

23 Rusia

PISA 2025, matemáticas: non participou

Dificultade relativa estimada: 6,5/10 (posto 6 dos 25 exames analizados; PAU de Galiza = 5)

Exame: Exame Estatal Unificado (EGE) de Matemáticas, nivel de perfil

Nome orixinal: *Yediny gosudarstvennyy ekzamen (YeGE) po matematike, profilny uroven* (Exame estatal unificado de matemáticas, nivel de perfil)

Ano e convocatoria: 2026, período principal (*osnovnaya volna*), 8 de xuño de 2026, rexión do Extremo Oriente

Duración: 3 h 55 min (235 minutos) **Calculadora:** non permitida

Estrutura e cualificación: 19 tarefas. Parte 1: tarefas 1–12, de resposta curta (un número enteiro ou decimal), 1 punto primario cada unha. Parte 2: tarefas 13–19, de resposta desenvolvida (13: 2 p.; 14: 3 p.; 15: 2 p.; 16: 2 p.; 17: 3 p.; 18: 4 p.; 19: 4 p.). Máximo: 32 puntos primarios, convertidos despois a unha escala de 100.

Contexto: O EGE é á vez o exame de fin de bacharelato e o exame de acceso á universidade en Rusia; as universidades admiten segundo a suma das puntuacións (0–100) en tres ou catro materias. O nivel de perfil é o exixido para carreiras científicas, técnicas e económicas (o nivel básico só serve para obter o título). O elabora o FIPI (Instituto Federal de Medicións Pedagóxicas).

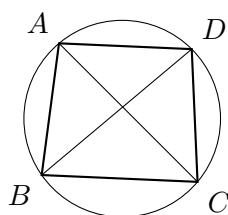
Fonte: https://3.shkolkovo.online/st/6/o/%D0%9E%D1%81%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%B2%D0%BE%D0%BB%D0%BD%D0%B0_%D0%95%D0%93%D0%AD_2026_11_30__aTk55.pdf; <https://yagubov.ru/ege2026real>

[Nota: As 19 tarefas son reais do exame do 8 de xuño de 2026 (primeira versión rotulada «Extremo Oriente» de cada número na recompilación de Shkolkovo); non forman necesariamente unha mesma variante (un mesmo caderno).]

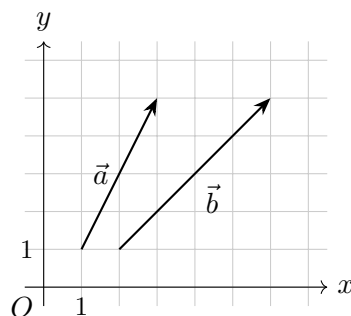
Parte 1

[Nota: A resposta de cada tarefa da parte 1 é un número enteiro ou unha fracción decimal finita, que se escribe na folla de respostas n.º 1.]

1. O cuadrilátero $ABCD$ está inscrito nunha circunferencia. O ángulo ABD mide 61° e o ángulo CAD mide 37° . Calcula o ángulo ABC .



2. No plano de coordenadas están representados os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, que teñen coordenadas enteiras. Calcula a lonxitude do vector $\vec{a} + \vec{b}$.



[Nota: Na figura: $\vec{a}$ vai de $(1, 1)$ a $(3, 5)$ e $\vec{b}$ de $(2, 1)$ a $(6, 5)$.]

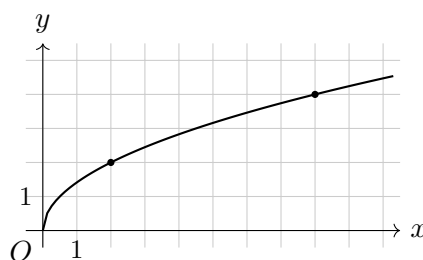
3. Pola paralela media da base dun prisma triangular trázase un plano paralelo á aresta lateral. A área da superficie lateral do prisma triangular cortado é igual a 36. Calcula a área da superficie lateral do prisma orixinal.
4. Nunha colección de papeletas de matemáticas hai en total 75 papeletas; en 12 delas aparece unha pregunta sobre o tema «Logaritmos». Calcula a probabilidade de que, na papeleta escollida ao chou no exame, ao alumno non lle toque unha pregunta sobre o tema «Logaritmos».
5. Un tirador dispara unha vez a cada un de catro brancos. A probabilidade de acertar no branco en cada disparo individual é 0,8. Calcula a probabilidade de que o tirador acerte nos tres primeiros brancos e non acerte no último.
6. Calcula a raíz da ecuación $\log_5(20 - x) = 2$.

7. Calcula o valor da expresión $\frac{2 \sin 136^\circ}{\sin 68^\circ \cdot \sin 22^\circ}$.

8. Na figura está representada a gráfica da función $y = f(x)$. No eixe de abscisas están marcados os puntos -2 , -1 , 2 , 4 . En cal destes puntos é menor o valor da derivada?

[Nota: Na figura: gráfica dunha función derivábel con catro puntos marcados no eixe OX $(-2, -1, 2, 4)$; a curva decrece na zona de $x = -1$ e crece despois dun mínimo.]

9. Nun televisor, a capacidade do condensador de alta tensión é $C = 5 \cdot 10^{-6}$ F. En paralelo co condensador está conectada unha resistencia $R = 7 \cdot 10^6 \Omega$. Durante o funcionamento do televisor, a tensión no condensador é $U_0 = 36$ kV. Despois de apagar o televisor, a tensión no condensador diminúe ata o valor U (kV) nun tempo determinado pola expresión $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (s), onde $\alpha = 0,8$ é unha constante. Determina a tensión no condensador se desde que se apagou o televisor pasaron 84 s. Dá a resposta en kilovoltios.
10. Un ciclista saíu a velocidade constante da cidade A cara á cidade B, que distan 72 km. Ao día seguinte emprendeu o regreso cunha velocidade 3 km/h maior ca antes. Polo camiño fixo unha parada de 2 horas. Como resultado, empregou no regreso o mesmo tempo que no camiño de A a B. Calcula a velocidade do ciclista no camiño de B a A. Dá a resposta en km/h.
11. Na figura está representada a gráfica da función $f(x) = k\sqrt{x}$. Calcula $f(32)$.



[Nota: Na figura: a gráfica pasa polos puntos de coordenadas enteiras $(2, 2)$ e $(8, 4)$.]

12. Calcula o punto de mínimo da función $y = x\sqrt{x} - 3x + 17$.

Parte 2

[Nota: Nas tarefas 13–19 hai que escribir a resolución completa e a resposta na folla de respostas n.º 2.]

13. (2 puntos)

- Resolve a ecuación $2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2 \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = 0$.
- Determina as raíces desta ecuación que pertencen ao intervalo $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

14. (3 puntos) Na pirámide hexagonal regular $SABCDEF$ de vértice S , o punto M é o punto medio de SD e o punto K é o punto medio de SA .

- Demostra que as rectas BK e CM están nun mesmo plano α .
- Calcula a altura da pirámide se o ángulo entre o plano α e o plano da base da pirámide é 60° e $AB = 6$.

15. (2 puntos) Resolve a inecuación

$$3^{\log_3(4+x^2)} + x^4 - 10 \geq 0.$$

16. (2 puntos) En xullo de 2028 está previsto pedir a un banco un crédito de 40 millóns de rublos a 4 anos. As condicións de devolución son as seguintes:

- cada xaneiro a débeda aumenta un $r\%$ con respecto á do final do ano anterior;
- de febreiro a xuño de cada ano hai que pagar unha parte da débeda;
- en xullo de 2029, 2030 e 2031 a débeda debe ser un 25% menor ca a débeda de xullo do ano anterior;
- en xullo de 2032 a débeda debe estar completamente saldada.

Sábese que a suma total dos pagamentos do crédito foi de 61,875 millóns de rublos. Calcula r .

17. (3 puntos) Nun triángulo rectángulo ABC está inscrita unha circunferencia, tanxente aos catetos AC , BC e á hipotenusa AB nos puntos M , E e K , respectivamente. EH é a perpendicular trazada desde o punto E á recta MK .

- Demostra que $EK \parallel CH$.
- Sábese que $AC = 15$ e $BC = 8$. Calcula a razón entre CH e EK .

18. (4 puntos) Determina todos os valores do parámetro a para cada un dos cales a ecuación

$$(x-2)a^2 - (x^3 - x^2 - 4)a + x^4 - 4x^2 = 0$$

ten exactamente 2 solucións.

19. (4 puntos) Enriba dunha mesa hai unha morea de cartas vermellas e azuis; en cada unha está escrito un número enteiro maior ca -32 . Os números das cartas dunha mesma cor son distintos. Os números de todas as cartas azuis son divisíbeis por 5, e os de todas as vermellas, por 8. Sábese que o maior número nunha carta vermella é igual ao triplo do número de cartas azuis, e o maior número nunha carta azul é igual ao número de cartas vermellas.

- Pode ser 1 o número de cartas azuis?
- Pode ser 40 o número de cartas azuis?
- Cal é o maior número de cartas azuis que pode haber na mesa?

Solucións

Tarefa 1. Os ángulos inscritos que abranguen o mesmo arco son iguais: $\angle ACD = \angle ABD = 61^\circ$ (arco AD) e $\angle CBD = \angle CAD = 37^\circ$ (arco CD). Como D está no interior do ángulo ABC ,

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = 61^\circ + 37^\circ = \boxed{98}.$$

Tarefa 2. $\vec{a} = (3-1, 5-1) = (2, 4)$, $\vec{b} = (6-2, 5-1) = (4, 4)$; $\vec{a} + \vec{b} = (6, 8)$ e $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{36+64} = \boxed{10}$.

Tarefa 3. O plano separa un prisma triangular coa mesma altura h cuxa base é o triángulo determinado pola paralela media, semellante á base orixinal con razón $\frac{1}{2}$. O seu perímetro é a metade do da base orixinal, e como a área lateral dun prisma recto é (perímetro da base) $\cdot h$ (en xeral, perímetro da sección perpendicular $\cdot$ aresta lateral, que tamén se reduce á metade), a área lateral orixinal é o dobre: $2 \cdot 36 = \boxed{72}$.

Tarefa 4. Casos favorábeis: $75 - 12 = 63$. $P = \frac{63}{75} = \frac{21}{25} = \boxed{0,84}$.

Tarefa 5. Disparos independentes: $P = 0,8^3 \cdot 0,2 = 0,512 \cdot 0,2 = \boxed{0,1024}$.

Tarefa 6. $20 - x = 5^2 = 25 \Rightarrow x = \boxed{-5}$ (cumpre $20 - x > 0$).

Tarefa 7. $\sin 136^\circ = \sin 44^\circ = 2 \sin 22^\circ \cos 22^\circ$ e $\sin 68^\circ = \cos 22^\circ$, logo

$$\frac{2 \cdot 2 \sin 22^\circ \cos 22^\circ}{\cos 22^\circ \sin 22^\circ} = \boxed{4}.$$

Tarefa 8. O valor da derivada é negativo onde a función decrece e positivo onde crece; o menor valor corresponde ao único punto marcado nun tramo decrecente, $x = -1$. **Resposta:** $\boxed{-1}$.

Tarefa 9. $\alpha RC = 0,8 \cdot 7 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-6} = 28$. Entón $84 = 28 \log_2 \frac{36}{U} \Rightarrow \log_2 \frac{36}{U} = 3 \Rightarrow U = \frac{36}{8} = \boxed{4,5}$ kV.

Tarefa 10. Sexa v (km/h) a velocidade na ida. Os tempos coinciden: $\frac{72}{v} = \frac{72}{v+3} + 2 \iff 216 = 2v(v+3) \iff v^2 + 3v - 108 = 0$, de onde $v = 9$ ($v = -12$ descártase). Velocidade no regreso: $9 + 3 = \boxed{12}$ km/h.

Tarefa 11. De $f(2) = 2$: $k\sqrt{2} = 2 \Rightarrow k = \sqrt{2}$ (comprobación: $f(8) = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 4$). $f(32) = \sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = \boxed{8}$.

Tarefa 12. $y = x^{3/2} - 3x + 17$, $x \geq 0$; $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 3 = 0 \iff x = 4$. $y' < 0$ en $(0, 4)$ e $y' > 0$ en $(4, +\infty)$: mínimo en $x = \boxed{4}$.

Tarefa 13. a) Como $\sin(\frac{3\pi}{2} + x) = -\cos x$, a ecuación é $\cos(x - \frac{\pi}{3}) = \cos x$. Logo $x - \frac{\pi}{3} = x + 2\pi k$ (imposíbel) ou $x - \frac{\pi}{3} = -x + 2\pi k$, isto é,

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(Alternativamente: $\cos(x - \frac{\pi}{3}) - \cos x = -2 \sin(x - \frac{\pi}{6}) \sin(-\frac{\pi}{6}) = \sin(x - \frac{\pi}{6}) = 0$.)

b) $-2\pi \leq \frac{\pi}{6} + \pi k \leq -\frac{\pi}{2} \iff -\frac{13}{6} \leq k \leq -\frac{2}{3} \iff k \in \{-2, -1\}$:

$$x = -\frac{11\pi}{6}, \quad x = -\frac{5\pi}{6}.$$

Tarefa 14. a) KM é a paralela media do triángulo SAD , logo $KM \parallel AD$. No hexágono regular $ABCDEF$ a diagonal maior AD é paralela ao lado BC . Por tanto $KM \parallel BC$, e dúas rectas paralelas determinan un plano α que contén B, C, M, K ; en particular, $BK \subset \alpha$ e $CM \subset \alpha$. $\square$

b) Sexa O o centro da base e $h = SO$. Tomamos $O = (0, 0, 0)$, $A = (6, 0, 0)$, $D = (-6, 0, 0)$, $B = (3, 3\sqrt{3}, 0)$, $C = (-3, 3\sqrt{3}, 0)$, $S = (0, 0, h)$. Entón $K = (3, 0, \frac{h}{2})$ e $M = (-3, 0, \frac{h}{2})$. Sexa N o punto medio de BC , $N = (0, 3\sqrt{3}, 0)$, e $P = (0, 0, \frac{h}{2})$ o punto medio de KM (que está sobre SO). Por simetría $PN \perp BC$, e a proxección de P na base é O , con $ON \perp BC$; así o ángulo entre α e a base é $\angle PNO$, con

$$\tan \angle PNO = \frac{PO}{ON} = \frac{h/2}{3\sqrt{3}} = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{h = 18}.$$

Tarefa 15. Como $4 + x^2 > 0$ para todo x , o dominio é $\mathbb{R}$ e $3^{\log_3(4+x^2)} = 4 + x^2$. A inecuación queda

$$x^4 + x^2 - 6 \geq 0 \iff (x^2 + 3)(x^2 - 2) \geq 0 \iff x^2 \geq 2.$$

$$x \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty).$$

Tarefa 16. Débeda en xullo (millóns): $D_0 = 40$, $D_1 = 30$, $D_2 = 22,5$, $D_3 = 16,875$, $D_4 = 0$ (cada ano o 75 % da anterior). Con $q = \frac{r}{100}$, o pagamento do ano k é $D_{k-1}(1+q) - D_k$, e a suma

$$\sum_{k=1}^4 (D_{k-1}(1+q) - D_k) = q(D_0 + D_1 + D_2 + D_3) + D_0 = 109,375q + 40.$$

Igualando a 61,875: $109,375q = 21,875 \Rightarrow q = 0,2$, logo $\boxed{r = 20}$.

Tarefa 17. Sexa I o incentro e ρ o inraio; C é o vértice do ángulo recto.

a) $CMIE$ é un cadrado ($\angle C = 90^\circ$, $IM \perp AC$, $IE \perp BC$, $IM = IE$), logo $\angle MIE = 90^\circ$. O ángulo inscrito $\angle MKE$ abrangue o arco ME que non contén K , polo que $\angle MKE = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$. Ademais, $\angle MHE = 90^\circ = \angle MCE$, así que C e H están na circunferencia de diámetro ME , e nela $\angle CHM = \angle CEM = 45^\circ$ (ángulos inscritos sobre a corda CM ; o triángulo CME é rectángulo isóscele). Polo tanto as rectas HC e KE forman co segmento MK ángulos correspondentes iguais ($\angle CHM = \angle EKM = 45^\circ$), e $EK \parallel CH$. $\square$

b) $AB = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$. Na circunferencia de diámetro $ME = \rho\sqrt{2}$, pola lei dos senos, $CH = ME \sin \angle CMH$. Como $AM = AK$, $\angle AMK = 90^\circ - \frac{A}{2}$ e $\angle CMH = 90^\circ + \frac{A}{2}$, de onde $CH = \rho\sqrt{2} \cos \frac{A}{2}$. Na incircunferencia, $\angle EIK = 180^\circ - B$ e $EK = 2\rho \cos \frac{B}{2}$. Así

$$\frac{CH}{EK} = \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sqrt{2} \cos \frac{B}{2}}, \quad \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1 + \frac{15}{17}}{2} = \frac{16}{17}, \quad \cos^2 \frac{B}{2} = \frac{1 + \frac{8}{17}}{2} = \frac{25}{34},$$

$$\left(\frac{CH}{EK}\right)^2 = \frac{16/17}{2 \cdot 25/34} = \frac{16}{25} \Rightarrow \boxed{\frac{CH}{EK} = \frac{4}{5}}.$$

(Comprobación en coordenadas: $C = (0, 0)$, $A = (15, 0)$, $B = (0, 8)$, $\rho = 3$, $M = (3, 0)$, $E = (0, 3)$, $K = (\frac{75}{17}, \frac{96}{17})$; resulta $CH \parallel EK$ e $CH : EK = 4 : 5$.)

Tarefa 18. Como $x^3 - x^2 - 4 = (x - 2)(x^2 + x + 2)$ e $x^4 - 4x^2 = x^2(x - 2)(x + 2)$, a ecuación factoriza:

$$(x - 2)(a^2 - (x^2 + x + 2)a + x^2(x + 2)) = (x - 2)(a - x^2)(a - x - 2) = 0.$$

O conxunto de solucións é $\{2\} \cup \{x : x^2 = a\} \cup \{a - 2\}$; hai que contar elementos distintos.

- $a < 0$: $x^2 = a$ non ten solucións; quedan 2 e $a - 2 \neq 2$: **dúas solucións**.
- $a = 0$: $\{2, 0, -2\}$: tres.
- $a > 0$: $\{2, \sqrt{a}, -\sqrt{a}, a - 2\}$. Coincidencias posibles: $\sqrt{a} = 2 \iff a = 4$, $a - 2 = 2 \iff a = 4$, $a - 2 = \sqrt{a} \iff a = 4$, $a - 2 = -\sqrt{a} \iff a = 1$ (con $-\sqrt{a} \neq 2$ sempre). Para $a = 4$: $\{2, -2\}$, dúas; para $a = 1$: $\{2, 1, -1\}$, tres; noutro caso, catro.

$$\boxed{a \in (-\infty, 0) \cup \{4\}}.$$

Tarefa 19. Sexan b e r os números de cartas azuis e vermellas ($b, r \geq 1$). Condicións: o maior número vermello, $3b$, é múltiplo de 8 $\Rightarrow 8 \mid b$; o maior número azul, r , é múltiplo de 5 $\Rightarrow 5 \mid r$. Os números vermellos son múltiplos de 8 distintos en $(-32, 3b]$, logo $r \leq \frac{3b+24}{8} + 1 = \frac{3b}{8} + 4$; os azuis son múltiplos de 5 distintos en $(-32, r]$, logo $b \leq \frac{r+30}{5} + 1 = \frac{r}{5} + 7$.

a) Se $b = 1$, o maior número vermello sería 3, que non é múltiplo de 8. **Non**.

b) Se $b = 40$: $r \leq 15 + 4 = 19$, e entón $b \leq \frac{19}{5} + 7 < 11 < 40$. Contradición. **Non**.

c) Das dúas cotas, $b \leq \frac{1}{5} \left(\frac{3b}{8} + 4\right) + 7 = \frac{3b}{40} + 7,8$, isto é, $\frac{37}{40}b \leq 7,8$, $b \leq 8,4$. Como $8 \mid b$, $b \leq 8$. Exemplo con $b = 8$: $r = 5$; vermellas 24, 16, 8, 0, -8 (maior 24 = $3 \cdot 8$); azuis 5, 0, -5 , -10 , -15 , -20 , -25 , -30 (oito cartas, maior 5 = r). Cumpre todo. **Resposta:** $\boxed{8}$.

24 Irán

PISA 2025, matemáticas: non participou

Dificultade relativa estimada: 7/10 (posto 4 dos 25 exames analizados; PAU de Galiza = 5)

Exame: Exame nacional de acceso á universidade (Konkur), grupo de Ciencias Matemáticas e Técnicas, caderno n.º 1 (Matemáticas, 40 preguntas), código de caderno 121A.

Nome orixinal: *Azmun-e ekhtesasi (sarasari)-ye vorud be daneshgah-ha va mo'assesat-e amuzesh-e ali, nobat-e dovvom, tirmah 1403; Gorouh-e azmayeshi-ye olum-e riyazi va fanni* ('exame específico (nacional) de acceso ás universidades e institucións de ensino superior, segunda quenda, mes de *tir* de 1403; grupo de probas de ciencias matemáticas e técnicas'). Organízao a *Sazman-e Melli-ye Sanjesh-e Amuzesh-e Keshvar* (Organización Nacional de Avaliación Educativa, Sanjesh).

Ano e convocatoria: 1403 do calendario solar iraniano (2024), **segunda quenda** (*nobat-e dovvom*), xoves 21 de *tir* de 1403 pola mañá (xoves 11 de xullo de 2024). En 1403 o Konkur celebrouse en dúas quendas (*ordibehesht* e *tir*).

Duración: 70 minutos para as 40 preguntas de matemáticas. **Calculadora:** non permitida.

Estrutura e cualificación: 40 preguntas tipo test con catro opcións (1)–(4), numeradas do 1 ao 40, cunha única resposta correcta; o exame ten *puntuación negativa* (na práctica habitual do Konkur cada resposta errada desconta un terzo dunha correcta; as preguntas en branco non descontan). Contido: álgebra (progresións, polinomios, ecuacións de segundo grao), lóxica, funcións (inversa, logaritmos, funcións a anacos), trigonometría, límites e derivadas, xeometría (plana e analítica, tamén no espazo), matrices, cónicas, probabilidade e estatística, e matemáticas discretas (teoría de números, combinatoria e grafos). A puntuación de cada materia calcúlase en porcentaxe de acertos e convértese nunha puntuación normalizada (*taraz*). A nota de acceso combina o Konkur (40 %) coas cualificacións dos exames finais nacionais de bacharelato (*sabeqe-ye tahsili*, 60 %, con efecto definitivo).

Contexto: o Konkur é a única vía de acceso ás universidades públicas iranianas máis prestixiosas (Sharif, Teherán, Amirkabir...); preséntanse centos de miles de candidatos cada ano e a orde de clasificación (*rotbe*) determina a carreira e a universidade. Para o grupo matemático, a sección de matemáticas é a de maior peso.

Fonte: caderno oficial 121A: <http://www8.sanjesh.org/download/1403/sar/stage2/riazi/121A.pdf> (copia: <https://dl.algebra.com/PACKAGES/27/482/1.pdf>); páxina do exame: <https://www.algebra.com/konkur/riazi/dakhel-tir-1403/>; clave oficial: <https://dl.algebra.com/PACKAGES/27/482/3.pdf>.

[Nota: No orixinal a coma decimal escríbese “/”; aquí úsase a coma.]

Instrucións

Portada. Organización Nacional de Avaliación Educativa. Exame específico (nacional) de acceso ás universidades e institucións de ensino superior. Grupo de probas de Ciencias Matemáticas e Técnicas. Xoves pola mañá, 21/04/1403. Caderno n.º 1.

Materia	N.º de preguntas	Desde a n.º	Ata a n.º	Tempo de resposta
Matemáticas	40	1	40	70 minutos

Non se permite o uso de calculadora. Este exame ten puntuación negativa.

Os dereitos de impresión, copia e difusión das preguntas por calquera medio (electrónico, etc.) despois da celebración do exame, para todas as persoas físicas e xurídicas, só se permiten coa autorización desta organización, e actuarase contra os infractores conforme á normativa.

[Nota: Este aviso de dereitos figura ao pé da portada. O caderno reproducése aquí en tradución, con fins exclusivamente docentes e de análise.]

Páxina 2. Estimado/a candidato/a: non cubrir os datos e a sinatura na táboa seguinte equivale á non presenza na sesión do exame.

Eu, co número de candidato
 , con pleno coñecemento, confirmo que o número do meu asiento coincide co número de
 candidato que figura na tarxeta de acceso, na parte superior da folla de respostas e do
 caderno de preguntas, e co tipo e código de control impresos no caderno de preguntas.
Sinatura:

[Nota: Cada páxina leva a cabeceira “Grupo de Matemáticas e Técnicas – Matemáticas, 121-A” e remata cun recadro baleiro “Lugar para facer os cálculos”, que aquí se omite.]

Enunciados (Matemáticas, preguntas 1–40)

1. Se $x + 1$, $x - 1$, $2x + 1$ e x son, respectivamente, os termos cuarto, quinto, sétimo e oitavo dunha progresión xeométrica, cal é o produto dos valores posibles da razón desta progresión?

(1) 1 (2) -1 (3) 2 (4) -2

2. Respecto da proposición lóxica $((p \Rightarrow q) \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$, cal das seguintes afirmacións é correcta?

(1) É sempre verdadeira.
 (2) É sempre falsa.
 (3) Só é verdadeira cando p é verdadeira.
 (4) Só é verdadeira cando q é falsa.

3. Se o intervalo máis grande no que a función $y = -5x^2 + ax - 8$ é estritamente crecente é $(-\infty; 2,5]$, cal é a ordenada do vértice da parábola?

(1) 13,75 (2) 14,25 (3) 23,25 (4) 24,75

4. Se $r(x)$ é o resto da división de $2 - x^{14}$ entre $x^2 + x + 1$, cal é a suma dos coeficientes do polinomio $r(x)$? ($x \neq 1$)

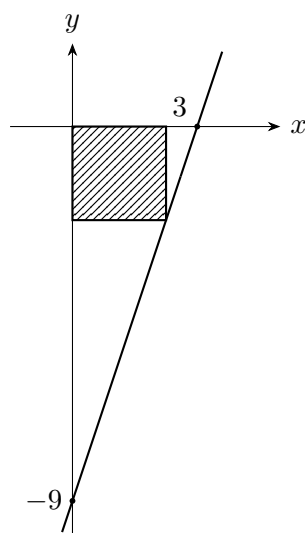
(1) cero (2) -1 (3) -2 (4) 4

[Nota: A indicación “($x \neq 1$)” figura así no orixinal.]

5. Para cantos valores enteiros de m son as dúas raíces da ecuación $2x^2 + 7x + m = 0$ maiores que -3 ?

(1) 4 (2) 3 (3) 1 (4) cero

6. Na figura seguinte, canto mide a diagonal do cadrado raiado?



- (1) $2,5\sqrt{2}$ (2) $3,5\sqrt{2}$ (3) $\frac{9}{2\sqrt{2}}$ (4) $\frac{9}{\sqrt{2}}$

[Nota: Na figura: a recta corta os eixes en $(3, 0)$ e $(0, -9)$; o cadrado raiado ten un vértice na orixe, os lados sobre os eixes (no cuarto cuadrante) e o vértice oposto sobre a recta.]

7. Nun rectángulo, os puntos $A(5, 2)$ e $C(4, -1)$ son dous vértices non contiguos, e os outros dous vértices, B e D , están sobre a recta $x - 3y = 3$. Cal é a diferenza das abscisas dos puntos B e D ?

- (1) 3 (2) 3,5 (3) 1 (4) 1,5

8. Sexa f a función definida a anacos $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 7, & x \geq 1, \\ 2x - 1, & x < 1. \end{cases}$ Para cantos valores de a se cumpre $f(1 - |a|) = f(2 + |a|)$?

- (1) 4 (2) 3 (3) 2 (4) 1

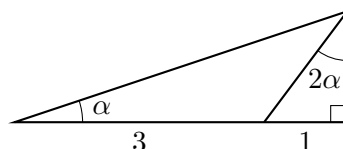
9. En cantos puntos corta a gráfica da función $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 + x}}$ a gráfica da súa función inversa?

- (1) 4 (2) 3 (3) 2 (4) 1

10. Se $\log(2 - x) - \log \frac{1}{(x - 2)^2} = 3$, cal é o valor de $\log_{\sqrt{2}}(-x)$?

- (1) -6 (2) 6 (3) $\frac{1}{4}$ (4) $-\frac{1}{4}$

11. Na figura seguinte, cal é o valor de $\cos 2\alpha$?



- (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{3}{4}$ (3) $\frac{3}{5}$ (4) $\frac{4}{5}$

[Nota: Na figura: triángulo rectángulo co ángulo recto no vértice inferior dereito; o cateto horizontal está dividido en segmentos de lonxitudes 3 e 1; o ángulo no vértice inferior esquerdo é α e o ángulo entre a ceviana e o cateto vertical é 2α .]

12. Se $3\sin^2 x + a\cos^2 x = 4$, a cal das seguintes expresións é igual $\cot^2 x$?

- (1) $\frac{1}{a-4}$ (2) $\frac{1}{4-a}$ (3) $\frac{1}{a-3}$ (4) $\frac{1}{3-a}$

13. No triángulo ABC , se $\tan(B-C) = \sqrt{3}$, cal é o valor da expresión $\frac{1-2\cos(B+C)}{4\sin B \cos C}$?

- (1) -1 (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $\tan B$ (4) $\tan C$

14. Cal é o número de solucións da ecuación $\cos(2x - \frac{\pi}{4}) + \cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0$ no intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$?

- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

15. Se $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + \sqrt{(bx+1)(cx+1)}}{x} = 2$, cal é o valor de $\frac{b}{a} + \frac{c}{a}$?

- (1) -2 (2) -4 (3) $-\frac{1}{2}$ (4) $-\frac{1}{4}$

16. Para cantos valores de a ten a función $f(x) = \frac{3x^2 - 8x - 3}{ax^2 + (1-a)x + a + 1}$ unha (única) asíntota vertical?

- (1) 2 (2) 4 (3) 5 (4) 7

17. Para un valor natural de c , a función $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x + 1}, & |x| \leq c, \\ ax^2 + bx + 2, & |x| > c, \end{cases}$ é continua en todo o conxunto dos números reais. Cal pode ser o valor de $[\frac{a}{b}]$?

- (1) -1 (2) -2 (3) -3 (4) -4

[Nota: $[\cdot]$ denota a parte enteira.]

18. Se $f(x) = \frac{8 + \cos^3 x}{4 - \cos^2 x}$ e $g(x) = \frac{2}{2 - \cos x}$, cal é o valor da expresión $f'(\frac{7\pi}{6}) - 2g'(\frac{7\pi}{6})$?

- (1) $\frac{1}{2}$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

19. Para cantos valores enteiros de m ten a función $f(x) = \begin{cases} b, & x < a, \\ b + (x-a)^m, & x \geq a, \end{cases}$ un punto anguloso?

- (1) cero (2) máis de 2 (3) 2 (4) 1

20. Considera a función f de expresión $f(x) = \sqrt{x(1-|x|)}$. Se m e n son, respectivamente, o número de puntos de máximo relativo e de mínimo relativo, e k é o número de puntos críticos da función f , cal é o valor de $m + n + k$?

- (1) 6 (2) 5 (3) 4 (4) 3

21. Reza quere colocar un libro de matemáticas e 5 libros doutras materias uns enriba doutros. En cantas das distintas maneiras de amarear os libros hai máis libros por riba do libro de matemáticas que por debaixo?

- (1) 360 (2) 300 (3) 240 (4) 200

[Nota: Literalmente: “en cantos casos distintos, ao colocar os libros, quedan máis libros enriba do libro de matemáticas?”.]

22. Lánzase unha moeda. Se sae cara, lánzanse 2 moedas e, se sae cruz, lánzanse 3 moedas. Con que probabilidade saen todas as moedas iguais?

- (1) $\frac{3}{12}$ (2) $\frac{3}{16}$ (3) $\frac{5}{12}$ (4) $\frac{5}{16}$

23. A media dun primeiro grupo de 5 datos distintos é igual á media dun segundo grupo de 6 datos, de forma que o único dato que difire entre os dous grupos é o dato a . Se a varianza do primeiro grupo é $\frac{2}{3}$ maior que a varianza do segundo grupo, cal é a varianza do primeiro grupo?

- (1) 1 (2) 2,25 (3) 4 (4) 6,25

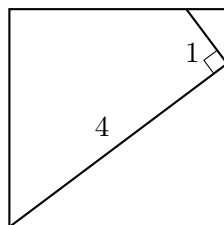
24. Durante un partido, o xogador A lanza dous penaltis. Este xogador marca o primeiro penalti cunha probabilidade do 60 por cento; nese caso, a probabilidade de marcar o segundo penalti é do 80 por cento e, en caso contrario, do 30 por cento. Con que probabilidade é distinto o resultado dos dous penaltis?

- (1) 0,44 (2) 0,24 (3) 0,6 (4) 0,3

25. Para cal das seguintes proposicións se pode dar un contraexemplo?

- (1) Todo cuadrilátero cuxas diagonais se cortan no seu punto medio é un paralelogramo.
 (2) En todo triángulo, as medianas relativas a lados iguais son iguais.
 (3) Todo cuadrilátero con diagonais iguais e perpendiculares é un cadrado.
 (4) As bisectrices dos ángulos interiores de todo triángulo son concorrentes.

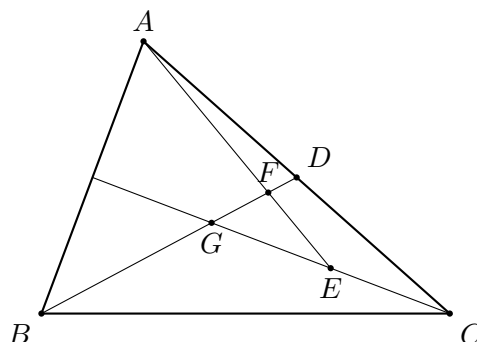
26. Canto mide a área do cadrado da figura seguinte?



- (1) 13,31 (2) 7,29 (3) 8,41 (4) 10,24

[Nota: Na figura: desde o vértice inferior esquerdo do cadrado sae un segmento de lonxitude 4 ata un punto do lado dereito; desde ese punto, un segmento de lonxitude 1, perpendicular ao anterior, chega ao lado superior.]

27. Na figura seguinte, G é o baricentro do triángulo ABC . Se $GE = EC$, cal é o valor de $\frac{BD}{FD}$?



(1) 9

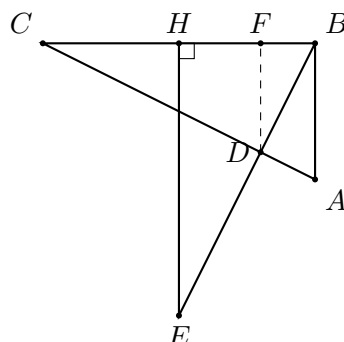
(2) 8

(3) 6

(4) 5

[Nota: Na figura: CE está sobre a mediana desde C , con E entre G e C ; BD é a mediana desde B (D en AC); o segmento AE corta BD en F .]

28. Na figura seguinte, os triángulos ABC e BEH son congruentes. Se $AB = 4$, $EH = 8$ e $DF \parallel EH$, canto mide BF ?



(1) 1,4

(2) 1,6

(3) 2,4

(4) 2,6

[Nota: Na figura: C , H , F e B están aliñados; $EH \perp CB$ e $AB \perp CB$; os segmentos CA e BE córtanse en D , e DF (de puntos) é paralelo a EH .]

29. As tanxentes trazadas a dúas circunferencias secantes nun punto de intersección delas son perpendiculares entre si. Se o raio da circunferencia menor é 1,5 e a distancia entre os centros das dúas circunferencias é 2,5, cal é o raio da circunferencia maior?

(1) $\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{5}$

(3) 3

(4) 2

30. No triángulo ABC , $BC = 10$, o punto D é o punto medio de BC , e DE e DF son, respectivamente, as bisectrices dos ángulos ADC e ADB . Se $AF = 12\sqrt{2}$ e $BF = 3\sqrt{2}$, canto mide a bisectriz DE ?

(1) 3

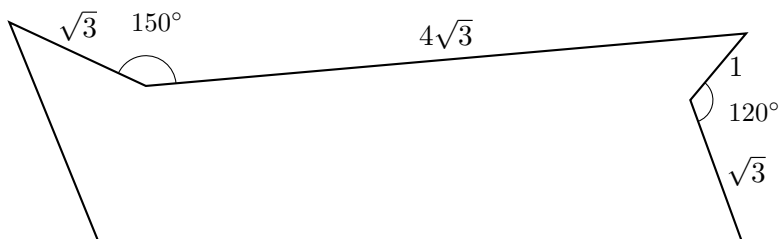
(2) 6

(3) $\sqrt{7}$

(4) $2\sqrt{7}$

[Nota: E está no lado AC e F no lado AB .]

31. Canto pode aumentar, como máximo, a área da figura seguinte sen cambiar o seu perímetro nin o número de lados?



(1) 15

(2) 9

(3) 7,5

(4) 4,5

[Nota: Na figura (non a escala): hexágono non convexo con dúas entrantes. Nunha, os lados $\sqrt{3}$ e $4\sqrt{3}$ forman un ángulo de 150° ; na outra, os lados 1 e $\sqrt{3}$ forman un ángulo de 120° (ángulos medidos por fóra da figura).]

32. Se $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ e $3A^{-1}B^{-1} - 2I = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, cal é a suma dos elementos da diagonal principal da matriz $3B^{-1} - 2A$?

- (1) -1 (2) -2 (3) -3 (4) -4

33. Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, a suma dos elementos de A^2 cantas veces é a suma dos elementos de A ?

- (1) 1 (2) -1 (3) -3 (4) 3

34. A recta $x = -\frac{5}{4}$ é a directriz da parábola de ecuación $3y^2 - 3x - ay = 0$. Cal é a diferenza dos valores de a ?

- (1) 12 (2) 8 (3) 6 (4) 4

35. A área dun triángulo é 64 e as coordenadas dos puntos medios dos seus lados son $A(3, a, b)$, $B(-1, -a, b)$ e $C(5, -4, b)$. Canto pode medir o lado AB ?

- (1) $2\sqrt{10}$ (2) $4\sqrt{10}$ (3) $4\sqrt{2}$ (4) $10\sqrt{2}$

[Nota: A , B e C son os puntos medios; “o lado AB ” é o do triángulo que forman eses puntos medios.]

36. O número enteiro a é múltiplo de 8 e o resto da súa división entre 23 é 5 . Cal é o resto da división de $\frac{a}{4}$ entre 23 ?

- (1) 5 (2) 7 (3) 13 (4) 19

37. En cantos subconxuntos do conxunto $\{12, 13, 15, 18, 23, 24, 25, 26\}$ é o produto do elemento menor polo elemento maior un múltiplo de 10 ?

- (1) 59 (2) 60 (3) 61 (4) 62

38. Para algúns valores naturais de n , a ecuación diofántica $57x + 133y = 22n - 1$ ten solución. Cal é a suma das cifras do menor destes n de dúas cifras?

- (1) 5 (2) 6 (3) 3 (4) 4

39. Cantos elementos, como mínimo, hai que escoller do conxunto $\{14, 15, 16, \dots, 20, 22, 23, 24, \dots, 28\}$ para que, con seguridade, polo menos tres dos elementos escollidos sexan números consecutivos?

- (1) 12 (2) 11 (3) 10 (4) 9

40. Nun grafo G , $\Delta(G) + 2\delta(G) = 17$ e $\Delta(\overline{G}) - \delta(\overline{G}) = 2$, e G está debuxado co menor número posíbel de vértices. Se $\overline{G}$ é conexo, cal é o maior número de arestas do grafo G ?

- (1) 30 (2) 28 (3) 26 (4) 24

[Nota: Δ é o grao máximo, δ o grao mínimo e $\overline{G}$ o grafo complementario de G .]

Clave oficial de respostas

1-2	2-1	3-3	4-4	5-2	6-3	7-1	8-3	9-4	10-2
11-4	12-1	13-4	14-3	15-2	16-3	17-1	18-2	19-4	20-2
21-1	22-2	23-3	24-2	25-3	26-4	27-1	28-2	29-4	30-2
31-3	32-2	33-4	34-1	35-3	36-2	37-3	38-4	39-2	40-1

[Nota: Formato “pregunta–opción”. Clave oficial publicada por Sanjesh (Kelid-e azmun-e sarasari-ye sal-e 1403 – tirmah – dakhel-e keshvar), caderno 121A.]

Solucións

[Nota: Todas as respostas se verificaron con Python (sympy, networkx e enumeración exhaustiva) e contrastáronse coa clave oficial de Sanjesh. Coinciden 39 das 40; na pregunta 40 a resposta correcta segundo o enunciado é a (2), non a (1) da clave. Na pregunta 35 hai dúas opcións válidas, e na pregunta 1 o enunciado é estritamente incoherente, aínda que o razoamento previsto leva á clave.]

Pregunta 1. Como $4 + 8 = 5 + 7$, nunha progresión xeométrica $a_4a_8 = a_5a_7$: $x(x+1) = (x-1)(2x+1) \iff x^2 - 2x - 1 = 0 \iff x = 1 \pm \sqrt{2}$. A razón é $r = \frac{a_5}{a_4} = \frac{x-1}{x+1}$, que vale $\sqrt{2} - 1$ ou $-(\sqrt{2} + 1)$, e o produto é $\frac{x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1}{x_1x_2 + (x_1 + x_2) + 1} = \frac{-1 - 2 + 1}{-1 + 2 + 1} = -1$. **Resposta: (2).** Coincide coa clave.

[Nota: En rigor, $a_4a_8 = a_5a_7$ é condición necesaria pero non suficiente: tamén debería cumprirse $a_7 = a_5r^2$, e iso falla (con $x = 1 + \sqrt{2}$, $a_5r^2 = 3\sqrt{2} - 4 \neq a_7 = 3 + 2\sqrt{2}$). Comprobouse con Python que ningunha das 24 ordenacións posibles das catro expresións dá unha progresión xeométrica auténtica. A pregunta está mal formulada, pero o razoamento previsto (o habitual no Konkur) leva á clave.]

Pregunta 2. Se r é verdadeira, $p \Rightarrow r$ é verdadeira e a implicación tamén o é. Se r é falsa, o antecedente $(p \Rightarrow q) \wedge r$ é falso e a implicación é verdadeira. É unha tautoloxía (comprobado coa táboa de verdade das 8 combinacións). **Resposta: (1).** Coincide coa clave.

Pregunta 3. A parábola abre cara abaixo e é crecente en $(-\infty, x_v]$, con $x_v = \frac{a}{10} = 2,5$, polo que $a = 25$. Logo $y_v = -5(2,5)^2 + 25 \cdot 2,5 - 8 = -31,25 + 62,5 - 8 = 23,25$. **Resposta: (3).** Coincide coa clave.

Pregunta 4. Como $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$, temos $x^3 \equiv 1$ módulo $x^2 + x + 1$. Entón $x^{14} = x^{12}x^2 \equiv x^2 \equiv -x - 1$ e $2 - x^{14} \equiv 2 + x + 1 = x + 3$. Así $r(x) = x + 3$ e a suma dos seus coeficientes é $r(1) = 4$. **Resposta: (4).** Coincide coa clave.

Pregunta 5. Sexa $g(x) = 2x^2 + 7x + m$. As dúas raíces son maiores que -3 se e só se $\Delta = 49 - 8m \geq 0$, $g(-3) = 18 - 21 + m > 0$ e o vértice $-\frac{7}{4} > -3$. Polo tanto $3 < m \leq \frac{49}{8}$, e $m \in \{4, 5, 6\}$. **Resposta: (2).** Coincide coa clave.

Pregunta 6. A recta pasa por $(3, 0)$ e $(0, -9)$: $y = 3x - 9$. O vértice oposto do cadrado de lado s é $(s, -s)$, e $-s = 3s - 9$ dá $s = \frac{9}{4}$. A diagonal mide $s\sqrt{2} = \frac{9\sqrt{2}}{4} = \frac{9}{2\sqrt{2}}$. **Resposta: (3).** Coincide coa clave.

Pregunta 7. As diagonais dun rectángulo son iguais e córtanse no punto medio común $M = (\frac{9}{2}, \frac{1}{2})$, que está na recta $(\frac{9}{2} - \frac{3}{2} = 3)$. Entón B e D están na recta a distancia $\frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ de M . Cun vector director unitario $\frac{1}{\sqrt{10}}(3, 1)$, temos $B, D = M \pm \frac{1}{2}(3, 1)$, é dicir, $(6, 1)$ e $(3, 0)$. A diferenza das abscisas é 3. (Comprobación: $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 0$.) **Resposta: (1).** Coincide coa clave.

Pregunta 8. Sexa $t = |a| \geq 0$. Se $t = 0$: $f(1) = -7 \neq f(2) = -5$. Se $t > 0$: $1 - t < 1$ e $2 + t \geq 1$, logo $2(1 - t) - 1 = (2 + t)^2 - (2 + t) - 7 \iff t^2 + 5t - 6 = 0 \iff t = 1$ (pois $t > 0$). Entón $a = \pm 1$: dous valores. **Resposta: (3).** Coincide coa clave.

Pregunta 9. O dominio de f é $[-1, 0]$ e o seu percorrido é $[0, 1]$, que é o dominio de f^{-1} . Un punto común (x, y) das dúas gráficas cumpre $x \in \text{Dom } f \cap \text{Dom } f^{-1} = \{0\}$, e $f(0) = 0$, así que $f^{-1}(0) = 0$. O único punto de corte é $(0, 0)$. **Resposta: (4).** Coincide coa clave.

Pregunta 10. Para $x < 2$: $\log(2 - x) + \log(x - 2)^2 = \log(2 - x)^3 = 3$, logo $2 - x = 10$ e $x = -8$. Entón $\log_{\sqrt{2}} 8 = \log_{\sqrt{2}} (\sqrt{2})^6 = 6$. **Resposta: (2).** Coincide coa clave.

Pregunta 11. Sexa h o cateto vertical. No triángulo grande, $\tan \alpha = \frac{h}{4}$; no triángulo pequeno, $\tan 2\alpha = \frac{1}{h}$. Entón $\frac{2 \cdot \frac{h}{4}}{1 - \frac{h^2}{16}} = \frac{1}{h} \iff \frac{h^2}{2} = 1 - \frac{h^2}{16} \iff h^2 = \frac{16}{9}$, así que $h = \frac{4}{3}$ e $\tan \alpha = \frac{1}{3}$. Polo tanto $\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{8/9}{10/9} = \frac{4}{5}$. **Resposta: (4).** Coincide coa clave.

Pregunta 12. $3(1 - \cos^2 x) + a \cos^2 x = 4 \iff \cos^2 x = \frac{1}{a-3}$, polo que $\sin^2 x = \frac{a-4}{a-3}$ e $\cot^2 x = \frac{1}{a-4}$ (con $a > 4$). **Resposta: (1).** Coincide coa clave.

Pregunta 13. Nun triángulo, $\tan(B - C) = \sqrt{3}$ dá $B - C = 60^\circ$ e $\cos(B - C) = \frac{1}{2}$. Entón $1 - 2\cos(B + C) = 2\cos(B - C) - 2\cos(B + C) = 4\sin B \sin C$, e $\frac{1 - 2\cos(B + C)}{4\sin B \cos C} = \frac{4\sin B \sin C}{4\sin B \cos C} = \tan C$ (comprobado numericamente). **Resposta: (4).** Coincide coa clave.

[Nota: Formalmente tamén sería posíbel $B - C = -120^\circ$ (con $B < 30^\circ$), e entón a expresión valería $-\cot B$, que non é opción. Enténdese o caso $B - C = 60^\circ$.]

Pregunta 14. Pola fórmula de suma a produto, $\cos(2x - \frac{\pi}{4}) + \cos(x + \frac{\pi}{4}) = 2\cos \frac{3x}{2} \cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) = 0$. $\cos \frac{3x}{2} = 0 \iff x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$, que dá $x = \pm \frac{\pi}{3}$ no intervalo; $\cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) = 0 \iff x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, que dá $x = -\frac{\pi}{2}$. En total hai 3 solucións. **Resposta: (3).** Coincide coa clave.

Pregunta 15. Para que o límite sexa finito, o numerador debe anularse en 0: $a + 1 = 0$, logo $a = -1$. Entón o límite é a derivada de $\sqrt{(bx + 1)(cx + 1)}$ en 0, é dicir, $\frac{b+c}{2} = 2$, polo que $b + c = 4$ e $\frac{b+c}{a} = -4$. **Resposta: (2).** Coincide coa clave.

Pregunta 16. O numerador é $(3x + 1)(x - 3)$ e o denominador é $D(x) = ax^2 + (1 - a)x + a + 1$. Hai unha única asíntota vertical nestes casos:

- $a = 0$: $D = x + 1$, cunha asíntota, $x = -1$.
- Raíz dobre: $\Delta = (1 - a)^2 - 4a(a + 1) = -3a^2 - 6a + 1 = 0$, é dicir, $a = -1 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$ (dous valores; a raíz dobre non é 3 nin $-\frac{1}{3}$).
- $D(3) = 7a + 4 = 0$, é dicir, $a = -\frac{4}{7}$: a outra raíz é $-\frac{1}{4}$ (produto $\frac{a+1}{a} = -\frac{3}{4}$), e queda só $x = -\frac{1}{4}$.
- $D(-\frac{1}{3}) = \frac{13a+6}{9} = 0$, é dicir, $a = -\frac{6}{13}$: a outra raíz é $\frac{7}{2}$, e queda só $x = \frac{7}{2}$.

Para os demais valores hai dúas asíntotas ($\Delta > 0$) ou ningunha ($\Delta < 0$). En total son 5 valores (verificado con sympy). **Resposta: (3).** Coincide coa clave.

Pregunta 17. Para $|x| \leq c$, $f(x) = |x-1|$. Pola continuidade en $x = c$ e en $x = -c$: $ac^2 + bc + 2 = c - 1$ e $ac^2 - bc + 2 = c + 1$. Restando, $b = -\frac{1}{c}$; sumando, $a = \frac{c-2}{c^2}$. Entón $\frac{a}{b} = \frac{2}{c} - 1$, que vale 1 se $c = 1$, 0 se $c = 2$ e está en $(-1, 0)$ se $c \geq 3$, onde $\left[\frac{a}{b}\right] = -1$. Das opcións, só é posíbel -1 . **Resposta: (1).** Coincide coa clave.

Pregunta 18. Con $u = \cos x$: $f = \frac{(2+u)(4-2u+u^2)}{(2-u)(2+u)} = \frac{u^2-2u+4}{2-u}$, polo que $f - 2g = \frac{u^2-2u}{2-u} = -u = -\cos x$. Entón $f' - 2g' = \sin x$, e $\sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$. **Resposta: (2).** Coincide coa clave.

Pregunta 19. Se $m \leq 0$, f non é continua en a ($(x-a)^m$ non está definido en $x = a$ ou, con $m = 0$, hai un salto), así que non hai punto angular. Se $m = 1$, $f'_-(a) = 0$ e $f'_+(a) = 1$: hai punto angular. Se $m \geq 2$, $f'_+(a) = 0 = f'_-(a)$: f é derivábel en a . Só hai un valor, $m = 1$. **Resposta: (4).** Coincide coa clave.

Pregunta 20. $x(1-|x|) \geq 0$ dá o dominio $(-\infty, -1] \cup [0, 1]$. En $[0, 1]$, $f = \sqrt{x-x^2}$ crece ata $x = \frac{1}{2}$ (máximo, $f' = 0$) e despois decrece. En $(-\infty, -1]$, $f = \sqrt{x^2+x}$ é decrecente. Coa convención do libro de texto iraniano (os extremos relativos poden estar nos extremos do dominio, pero os puntos críticos son puntos interiores do dominio onde $f' = 0$ ou non existe): $m = 1$ (en $x = \frac{1}{2}$), $n = 3$ (en $x = -1, 0, 1$, onde $f = 0$) e $k = 1$ (en $x = \frac{1}{2}$). Así $m + n + k = 5$. **Resposta: (2).** Coincide coa clave.

[Nota: Coa convención contraria (sen extremos relativos nos extremos do dominio, pero contando como críticos os puntos do dominio onde non existe a derivada) sae $1 + 0 + 4 = 5$, o mesmo resultado.]

Pregunta 21. Se o libro de matemáticas ocupa o posto i (contando desde abaixo), ten $i - 1$ libros debaixo e $6 - i$ enriba. A condición $6 - i > i - 1$ dá $i \leq 3$. Hai 3 postos e $5!$ ordes dos outros libros: $3 \cdot 120 = 360$. **Resposta: (1).** Coincide coa clave.

Pregunta 22. Contando tamén a primeira moeda, deben saír todas cara ou todas cruz: $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{16}$. **Resposta: (2).** Coincide coa clave. (Se non se conta a primeira moeda, sae $\frac{3}{8}$, que non é opción.)

Pregunta 23. O segundo grupo é o primeiro máis o dato a . Como teñen a mesma media μ , $a = \mu$. Entón $\sigma_2^2 = \frac{1}{6} \left(\sum_{i=1}^5 (x_i - \mu)^2 + 0 \right) = \frac{5}{6} \sigma_1^2$, e $\sigma_1^2 - \sigma_2^2 = \frac{1}{6} \sigma_1^2 = \frac{2}{3}$ dá $\sigma_1^2 = 4$. **Resposta: (3).** Coincide coa clave.

Pregunta 24. $P(\text{distintos}) = P(G_1)P(\overline{G_2} \mid G_1) + P(\overline{G_1})P(G_2 \mid \overline{G_1}) = 0,6 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,3 = 0,24$. **Resposta: (2).** Coincide coa clave.

Pregunta 25. (1), (2) e (4) son teoremas. Para (3), un contraexemplo é o deltoide de vértices $(-1, 0)$, $(0, -\frac{1}{2})$, $(1, 0)$, $(0, \frac{3}{2})$: as diagonais miden 2 e son perpendiculares, pero non se cortan no seu punto medio, así que non é un cadrado. **Resposta: (3).** Coincide coa clave.

Pregunta 26. Tomamos o vértice inferior esquerdo como orixe e o lado como s . Sexa $P = (s, y)$, con $s^2 + y^2 = 16$. O segmento perpendicular de lonxitude 1 vai na dirección $\frac{1}{4}(-y, s)$ e chega a $(s - \frac{y}{4}, y + \frac{s}{4})$, que debe estar no lado superior: $y + \frac{s}{4} = s$, é dicir, $y = \frac{3s}{4}$. Entón $\frac{25s^2}{16} = 16$, e área $s^2 = \frac{256}{25} = 10,24$ ($s = 3,2$). **Resposta: (4).** Coincide coa clave.

Pregunta 27. Sexa M o punto medio de AB . Temos $CG = \frac{2}{3}CM$ e E é o punto medio de GC , logo $E = C + \frac{1}{3}(M - C) = \frac{A+B+4C}{6}$; ademais $D = \frac{A+C}{2}$. Igualamos $A + t(E - A) = B + u(D - B)$ e comparamos os coeficientes baricéntricos: $1 - \frac{5t}{6} = \frac{u}{2}$, $\frac{t}{6} = 1 - u$, $\frac{4t}{6} = \frac{u}{2}$. Resulta $t = \frac{2}{3}$ e $u = \frac{8}{9}$. Polo tanto $BF = \frac{8}{9}BD$, $FD = \frac{1}{9}BD$ e $\frac{BD}{FD} = 9$ (comprobado con coordenadas). **Resposta: (1).** Coincide coa clave.

Pregunta 28. Pola congruencia, $BC = EH = 8$, $BH = AB = 4$ e os ángulos en B e en H son rectos. Sexan $BF = t$ e $DF = h$. Como $DF \parallel AB \parallel EH$, das semellanzas $CFD \sim CBA$ e $BFD \sim BHE$ obtemos $\frac{h}{4} = \frac{8-t}{8}$ e $\frac{h}{8} = \frac{t}{4}$. Entón $h = 2t$ e $4t = 8 - t$, de onde $BF = \frac{8}{5} = 1,6$. (Con coordenadas, $D = (-\frac{8}{5}, -\frac{16}{5})$.) **Resposta: (2).** Coincide coa clave.

Pregunta 29. Se as tanxentes no punto común P son perpendiculares, os raios O_1P e O_2P tamén o son. Por Pitágoras, $R^2 + 1,5^2 = 2,5^2$, logo $R = 2$. **Resposta: (4).** Coincide coa clave.

Pregunta 30. $BD = DC = 5$. Polo teorema da bisectriz en ABD , $\frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FB} = 4$, logo $AD = 20$. Polo teorema de Apolonio en ABC , $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2$, é dicir, $450 + AC^2 = 850$ e $AC = 20$. En ADC , $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DC} = 4$, logo $AE = 16$ e $EC = 4$. A lonxitude da bisectriz é $DE^2 = AD \cdot DC - AE \cdot EC = 100 - 64 = 36$, así que $DE = 6$. (Tamén: $DF^2 = 100 - 72 = 28$, $EF \parallel BC$ con $EF = 8$, e $DE^2 + DF^2 = EF^2$ porque as dúas bisectrices son perpendiculares.) **Resposta: (2).** Coincide coa clave.

Pregunta 31. Ao reflectir cada entrante respecto da diagonal que a pecha, os lados conservan a súa lonxitude (o perímetro e o número de lados non cambian) e a área aumenta no dobre da área do triángulo reflectido: $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \sin 150^\circ + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin 120^\circ = 6 + 1,5 = 7,5$. **Resposta: (3).** Coincide coa clave.

[Nota: É a idea do libro de xeometría iraniano: un polígono non convexo convértese nun convexo co mesmo perímetro e maior área reflectindo as entrantes. Se se permitise cambiar tamén as lonxitudes dos lados, a área podería aumentar máis.]

Pregunta 32. $\det A^{-1} = -2 + 1 = -1$, logo $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ e $\text{tr } A = -\frac{7}{2}$. Ademais $A^{-1}B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, polo que $B^{-1} = A \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}$ e $\text{tr } B^{-1} = -3$. Polo tanto $\text{tr}(3B^{-1} - 2A) = -9 + 7 = -2$. **Resposta: (2).** Coincide coa clave.

Pregunta 33. $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. A suma dos elementos de A^2 é 6 e a dos de A é 2; o cociente é 3. **Resposta: (4).** Coincide coa clave.

Pregunta 34. $x = y^2 - \frac{a}{3}y = (y - \frac{a}{6})^2 - \frac{a^2}{36}$, que é unha parábola con $4p = 1$ ($p = \frac{1}{4}$) e vértice en $x_v = -\frac{a^2}{36}$. A directriz é $x = x_v - \frac{1}{4} = -\frac{5}{4}$, polo que $a^2 = 36$ e $a = \pm 6$. A diferenza dos valores de a é 12. **Resposta: (1).** Coincide coa clave.

Pregunta 35. O triángulo dos puntos medios ten área $\frac{64}{4} = 16$. Os tres puntos están no plano $z = b$, polo que área $= \frac{1}{2}|(-4)(-4-a) - (-2a)(2)| = |8 + 4a| = 16$, de onde $a = 2$ ou $a = -6$. Entón $AB = \sqrt{16 + 4a^2}$ vale $4\sqrt{2}$ (con $a = 2$) ou $4\sqrt{10}$ (con $a = -6$). **Resposta segundo a clave: (3)** ($4\sqrt{2}$).

[Nota: Co enunciado tal como está, a opción (2), $4\sqrt{10}$, tamén é un valor posíbel de AB (con $a = -6$ os puntos non están aliñados e o triángulo orixinal ten área 64). Ningunha condición do texto exclúe $a = -6$, así que a pregunta ten dúas respostas válidas; a clave só recolle a primeira.]

Pregunta 36. $a = 4k$, con $k = \frac{a}{4}$ par. A condición $4k \equiv 5 \pmod{23}$ e o feito de que $4^{-1} \equiv 6 \pmod{23}$ (pois $24 \equiv 1$) dan $k \equiv 30 \equiv 7 \pmod{23}$. Por exemplo, $a = 120$ e $k = 30$. **Resposta: (2).** Coincide coa clave.

Pregunta 37. Para cada par (mínimo, máximo) con produto múltiplo de 10 hai 2^j subconxuntos, onde j é o número de elementos do conxunto estritamente entre eles. O factor 5 só o achegan 15 e 25, e o produto ten que ser par:

(12, 15): 2, (12, 25): 32, (15, 18): 1, (15, 24): 4, (15, 26): 16, (18, 25): 4, (24, 25): 1, (25, 26): 1.

O total é 61 (verificado enumerando os 255 subconxuntos non baleiros). **Resposta: (3).** Coincide coa clave.

Pregunta 38. $\text{mcd}(57, 133) = 19$, así que a ecuación ten solución se e só se $19 \mid 22n - 1$, é dicir, $3n \equiv 1 \pmod{19}$, que dá $n \equiv 13 \pmod{19}$. O menor n de dúas cifras é 13, e a suma das súas cifras é 4. **Resposta: (4).** Coincide coa clave.

Pregunta 39. O conxunto está formado por dous bloques de 7 enteiros consecutivos, $\{14, \dots, 20\}$ e $\{22, \dots, 28\}$ (o 21 non está). Nun bloque pódense escoller como máximo 5 elementos sen tres consecutivos (por exemplo, 14, 15, 17, 18, 20; ao dividilo en $\{14, 15, 16\}$, $\{17, 18, 19\}$, $\{20\}$ vese que non caben máis). Así, 10 elementos poden non conter tres consecutivos; con 11, un bloque ten polo menos 6 e aparecen tres consecutivos. **Resposta: (2).** Coincide coa clave.

Pregunta 40. Cun grafo de p vértices, $\Delta(\overline{G}) = p - 1 - \delta(G)$ e $\delta(\overline{G}) = p - 1 - \Delta(G)$, así que $\Delta(G) - \delta(G) = 2$. Xunto con $\Delta + 2\delta = 17$, sae $\delta(G) = 5$ e $\Delta(G) = 7$. Con $p = 8$, un vértice de grao 7 quedaría illado en $\overline{G}$, que non sería conexo; polo tanto o mínimo é $p = 9$. Entón $|E(G)| = 36 - |E(\overline{G})|$, e un grafo conexo de 9 vértices ten polo menos 8 arestas. Unha árbore con graos en $\{1, 2, 3\}$ e algún vértice de grao 3 serve, e dá graos de G entre 5 e 7, con $\delta = 5$ e $\Delta = 7$. Máximo: $36 - 8 = 28$ (verificado con networkx). **Resposta: (2).**

[Nota: NON coincide coa clave oficial, que dá a opción (1), 30. Ese valor obtense con $p = 9$ e $\overline{G} = K_{1,3} \cup P_3 \cup K_2$ (6 arestas: graos de G entre 5 e 7), pero ese $\overline{G}$ non é conexo. A clave parece usar a conexión de $\overline{G}$ só para descartar $p = 8$ e esquecerla despois. Co enunciado tal como está, a resposta correcta é 28.]

25 Alxeria

PISA 2025, matemáticas: non participou

Dificultade relativa estimada: 6/10 (posto 7 dos 25 exames analizados; PAU de Galiza = 5)

Exame: Exame de Bacharelato do ensino secundario — Matemáticas, rama (série) Matemáticas

Nome orixinal: Imtihān bakālūryā at-ta^clīm ath-thānawī, ikhtibār fī māddat ar-riyāḍiyyāt, shu^cbat riyāḍiyyāt («Exame de bacharelato do ensino secundario, proba da materia de matemáticas, rama matemáticas»); en francés, *Baccalauréat de l'enseignement secondaire, série Mathématiques*

Ano e convocatoria: sesión 2026, convocatoria única (xuño de 2026)

Duración: 4 h 30 min **Calculadora:** non se indica no enunciado

Estrutura e cualificación: o candidato escolle UN de dous temas (*sujets*) completos; cada tema ten 4 exercicios (tema 1: 4 + 4 + 5 + 7 = 20 puntos). O enunciado ten 5 páxinas (tema 1: páxs. 1–3; tema 2: páxs. 4–5).

Contexto: Exame nacional organizado pola ONEC (Office National des Examens et Concours) do Ministerio de Educación Nacional. O Bac é a única vía de acceso á universidade; a orientación (a carreira á que se ten acceso) depende da media do Bac. A rama Matemáticas é a máis exixente en matemáticas (a materia ten o coeficiente máis alto, 7). O orixinal está en árabe con fórmulas en notación latina; non existe versión oficial en francés.

Fonte: <https://eddirasa.com/uploads/2026/08/bac-math-maths-2026.pdf>; páxina: <https://eddirasa.com/bac-math-maths-2026/>; corrección: <https://eddirasa.com/uploads/2026/08/correction-bac-math-maths-2026.pdf>

Instrucións

República Alxerina Democrática e Popular. Ministerio de Educación Nacional. Oficina Nacional de Exames e Concursos. Exame de bacharelato do ensino secundario. Sesión: 2026. Rama: Matemáticas. Proba da materia: Matemáticas. Duración: 4 h 30 min.

O candidato debe escoller un dos dous temas seguintes:

Tema 1

(O tema ocupa 3 páxinas, da páxina 1 á páxina 3 de 5.)

Exercicio 1

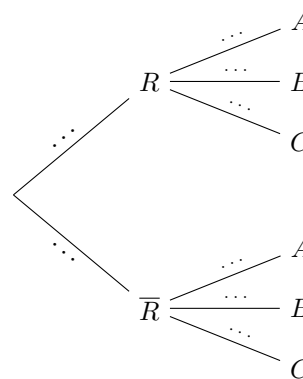
(4 puntos)

A bolsa U contén 4 bólas vermellas e 3 bólas verdes, e a bolsa V contén 2 bólas vermellas e 2 bólas verdes. Todas as bólas son idénticas e non se distinguen ao tacto.

Extraemos ao chou dúas bólas á vez de U : se son as dúas vermellas, poñémolas en V ; e se non son as dúas vermellas, devolvémolas a U . A continuación extraemos de V dúas bólas á vez, e consideramos os sucesos:

- R : «extraer dúas bólas vermellas de U »;
- A : «extraer dúas bólas vermellas de V »;
- B : «extraer dúas bólas verdes de V »;
- C : «extraer dúas bólas de cores diferentes de V ».

1. Copia e completa a árbore de probabilidades da dereita.
2. Comproba que $P(A) = \frac{7}{30}$ e calcula $P(B)$ e $P(C)$.
3. Calcula a probabilidade de extraer dúas bólas vermellas de U sabendo que as dúas bólas extraídas de V son verdes.
4. X é a variábel aleatoria que asocia a cada extracción realizada do xeito anterior o número de bólas verdes extraídas da bolsa V .
 - Determina a lei de probabilidade da variábel aleatoria X e despois calcula a esperanza matemática $E(21X + 1428)$.

**Exercicio 2****(4 puntos)**

1. Resolve no conxunto $\mathbb{C}$ a ecuación seguinte de incógnita z :

$$(z - 1 - i\sqrt{3})(z^2 - 2iz - 2) = 0.$$

2. No plano complexo referido ao sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$, consideramos os puntos A , B , C e D de afixos respectivos z_A , z_B , z_C e z_D , onde:

$$z_A = 1 + i, \quad z_B = 1 + i\sqrt{3}, \quad z_C = -1 + i \quad \text{e} \quad z_D = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}(1 + i).$$

- a) Escribe na forma trigonométrica cada un dos números z_A , z_B , z_C e z_D .
 - b) Deduce a forma trigonométrica do número complexo L , onde $L = \frac{z_A}{z_B}$.
 - c) Escribe o número L na forma alxébrica e despois deduce o valor exacto de $\cos \frac{7\pi}{12}$ e de $\sin \frac{7\pi}{12}$.
3.
 - a) Comproba que $z_A - z_D = i(z_B - z_D)$ e despois demostra que o triángulo ABD é rectángulo e isóscele.
 - b) Determina z_E , o afixo do punto E , baricentro do sistema $\{(A; 1), (B; 1), (D; -1)\}$, e despois determina a natureza do cuadrilátero $AEBD$.

Exercicio 3**(5 puntos)**

Consideramos a ecuación (E) : $675x - 525y = \alpha$, onde x e y son números enteiros e α é un número enteiro non nulo.

1. Determina o máximo común divisor dos números 525 e 675; deduce despois os valores de α para os que a ecuación (E) admite solucións.
2. Tomamos $\alpha = 825$.
 - a) Resolve a ecuación (E) , sabendo que o par $(2; 1)$ é unha solución dela.
 - b) Determina os pares $(x; y)$ solucións da ecuación (E) para os que $\text{mcd}(x; y) = 11$.

3. a) Demuestra que para todo número natural n , os números $7n + 4$ e $9n + 5$ son primos entre si.
 b) Calcula, en función do número natural non nulo n , o máximo común divisor e o mínimo común múltiplo dos números a e b , onde:

$$a = 77n^2 + 44n \quad \text{e} \quad b = 99n^2 + 55n.$$

4. a) Estuda, segundo os valores do número natural n , os restos da división euclidiana do número 4^n entre 7.
 b) Deduce o resto da división euclidiana do número L entre 7, onde:

$$L = 1 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{2 \times 2025}.$$

5. Determina os valores do número natural n para os que $3L + ab \equiv 0 \pmod{7}$.

Exercicio 4

(7 puntos)

I) g é a función definida en $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ por:

$$g(x) = x^2 + 2x + 1 + 2 \ln |x + 1|.$$

1. a) Demuestra que para todo x de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$: $g'(x) = \frac{2[(x+1)^2 + 1]}{x+1}$.
 b) Deduce o sentido de variación da función g e despois elabora a súa táboa de variación (non se pide o cálculo dos límites).
 2. a) Demuestra que a ecuación $g(x) = 0$ admite unha única solución α no intervalo $] -1,8; -1,7[$.
 b) Comproba que $-2 - \alpha$ é solución da ecuación $g(x) = 0$ e deduce despois o signo de $g(x)$ segundo os valores de x .

II) f é a función definida en $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ por:

$$f(x) = x + 2 - \frac{2(1 + \ln |x + 1|)}{x + 1},$$

e (C_f) a súa representación gráfica no plano referido ao sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calcula $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x)$ e $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x)$.

2. a) Demuestra que para todo x de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$.
 b) Deduce o sentido de variación da función f e despois elabora a súa táboa de variación.
 3. a) Demuestra que a recta (Δ) de ecuación $y = x + 2$ é asíntota oblicua de (C_f) .
 b) Demuestra que para todo x de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$: $f(-2 - x) + f(x) = 2$.
 – Deduce que a curva (C_f) admite un centro de simetría, do que se pide determinar as coordenadas.
 4. a) Demuestra que (C_f) admite dúas tanxentes (T) e (T') paralelas a (Δ) ; pídesse determinar unha ecuación de cada unha delas.
 b) Debuxa (Δ) , (T) , (T') e (C_f) . (Tómase $f(\alpha) \approx 2,2$ e $f(-2 - \alpha) \approx -0,2$.)

- c) Determina graficamente os valores do parámetro real m para os que a ecuación $f(x) = x + m$ admite exactamente dúas solucións.
5. a) Calcula, en función de λ , a área $\mathcal{A}(\lambda)$ do recinto plano delimitado pola curva (C_f) e as rectas de ecuacións $y = x + 2$, $x = \dots$ e $x = \lambda$, onde $\lambda \dots$ ($\mathcal{A}(\lambda)$ exprésase en unidades de área).
- b) Determina o valor de λ para que $\mathcal{A}(\lambda) = \dots$

[Nota: Na pregunta 5 omítense a segunda recta vertical, a condición sobre λ e o valor de $\mathcal{A}(\lambda)$ pedido en b), marcados con puntos suspensivos; o resultado de a) contén $\ln|\lambda + 1|$ e o seu cadrado, e o valor de λ pedido en b) exprésase mediante e.]

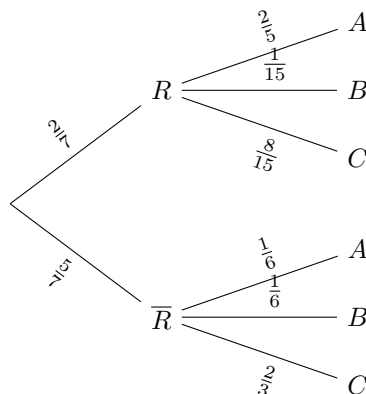
Tema 2

[Nota: O tema 2 (páxinas 4 e 5) non se traduce. Contén: Exercicio 1 (4 puntos), parte dun triángulo ABC rectángulo en A nun plano con sistema de referencia ortonormal e dun par de números que verifica unha ecuación; Exercicio 2 (4 puntos), probabilidade: dunha clase de matemáticas con 8 rapaces (entre eles Ahmed) e 6 rapazas (entre elas Fatima) escóllense ao chou 3 alumnos para unha olimpiada; Exercicio 3 (5 puntos), números complexos cun parámetro real θ (resolución dunha ecuación en $\mathbb{C}$ que depende de θ , con θ nun intervalo de amplitude π , e puntos A, B, C, D do plano complexo); Exercicio 4 (7 puntos), estudo dunha función auxiliar g con exponenciais e dunha función f (límites, derivadas, curva e cálculo de áreas).]

Solucións

(Resólvese o tema 1, o único traducido.)

Exercicio 1. 1. $P(R) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$, $P(\bar{R}) = \frac{5}{7}$. Se ocorre R , V pasa a ter 4 vermellas e 2 verdes ($\binom{6}{2} = 15$ pares): $P_R(A) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$, $P_R(B) = \frac{1}{15}$, $P_R(C) = \frac{4 \cdot 2}{15} = \frac{8}{15}$. Se ocorre $\bar{R}$, V segue con 2 vermellas e 2 verdes ($\binom{4}{2} = 6$ pares): $P_{\bar{R}}(A) = \frac{1}{6}$, $P_{\bar{R}}(B) = \frac{1}{6}$, $P_{\bar{R}}(C) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.



2. Pola fórmula das probabilidades totais:

$$P(A) = \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{5} + \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{35} + \frac{5}{42} = \frac{49}{210} = \boxed{\frac{7}{30}}, \quad P(B) = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{15} + \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{210} + \frac{25}{210} = \boxed{\frac{29}{210}},$$

$$P(C) = 1 - P(A) - P(B) = \frac{210 - 49 - 29}{210} = \frac{132}{210} = \boxed{\frac{22}{35}}.$$

$$3. P_B(R) = \frac{P(R \cap B)}{P(B)} = \frac{4/210}{29/210} = \boxed{\frac{4}{29}}.$$

$$4. X \in \{0, 1, 2\}: \{X = 0\} = A, \{X = 1\} = C, \{X = 2\} = B.$$

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{49}{210} = \frac{7}{30}$	$\frac{132}{210} = \frac{22}{35}$	$\frac{29}{210}$

$$E(X) = \frac{132+2 \cdot 29}{210} = \frac{190}{210} = \frac{19}{21}, \text{ e pola linearidade } E(21X + 1428) = 21 \cdot \frac{19}{21} + 1428 = \boxed{1447}.$$

Exercicio 2. 1. O primeiro factor dá $z = 1 + i\sqrt{3}$. Para $z^2 - 2iz - 2 = 0$: $\Delta = (-2i)^2 + 8 = 4$, $z = \frac{2i \pm 2}{2} = i \pm 1$ (equivalentemente, $(z - i)^2 = 1$).

$$\boxed{S = \{1 + i\sqrt{3}; 1 + i; -1 + i\}}.$$

$$2. \text{ a) } z_A = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}); z_B = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}); z_C = \sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}); \text{ como } \frac{1+\sqrt{3}}{2} > 0, \\ z_D = \frac{1+\sqrt{3}}{2} z_A = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}).$$

$$\text{b) } \overline{z_B} = 2(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3})), \text{ logo}$$

$$L = \frac{z_A}{\overline{z_B}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3})) = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12})}.$$

$$\text{c) } L = \frac{1+i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{(1+i)(1+i\sqrt{3})}{4} = \boxed{\frac{1-\sqrt{3}}{4} + \frac{1+\sqrt{3}}{4}i}. \text{ Identificando partes real e imaxinaria coa forma de b):}$$

$$\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{3}}{4} = \boxed{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}, \quad \sin \frac{7\pi}{12} = \boxed{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}.$$

$$3. \text{ a) } z_A - z_D = \frac{1-\sqrt{3}}{2}(1+i) \text{ e } z_B - z_D = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}(1-i); \text{ como } i(1-i) = 1+i, \\ \text{resulta } z_A - z_D = i(z_B - z_D). \text{ Daquela } \frac{z_A - z_D}{z_B - z_D} = i: \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}} = |i| = 1 \text{ e } (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA}) = \arg i = \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

O triángulo ABD é rectángulo e isóscele en D (con $DA = DB = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$).

$$\text{b) A suma dos pesos é } 1 + 1 - 1 = 1 \neq 0, \text{ logo } z_E = z_A + z_B - z_D:$$

$$\boxed{z_E = \frac{3-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i}.$$

De $z_E + z_D = z_A + z_B$ séguese que $[AB]$ e $[ED]$ teñen o mesmo punto medio: $AEBD$ é un paralelogramo. Ten un ángulo recto en D e dous lados consecutivos iguais ($DA = DB$), logo $AEBD$ é un cadrado.

Exercicio 3. 1. $675 = 525 \cdot 1 + 150$, $525 = 150 \cdot 3 + 75$, $150 = 75 \cdot 2$: $\boxed{\text{mcd}(525; 675) = 75}$. Pola identidade de Bézout, (E) ten solucións se e só se $75 \mid \alpha$: $\boxed{\alpha = 75k, k \in \mathbb{Z}^*}$.

2. a) Con $\alpha = 825 = 75 \cdot 11$, $(E) \iff 9x - 7y = 11$. Como $9 \cdot 2 - 7 \cdot 1 = 11$, restando: $9(x - 2) = 7(y - 1)$. Como $\text{mcd}(9; 7) = 1$, polo teorema de Gauss $7 \mid x - 2$: $x = 7k + 2$ e entón $y = 9k + 1$. Recíprocamente estes pares son solucións.

$$\boxed{S = \{(7k + 2; 9k + 1), k \in \mathbb{Z}\}}.$$

b) Se $d = \text{mcd}(x; y)$, entón $d \mid 9x - 7y = 11$, logo $d \in \{1; 11\}$; hai que impor $11 \mid x$ e $11 \mid y$.
 $7k + 2 \equiv 0 \pmod{11} \iff 7k \equiv 9 \pmod{11} \iff k \equiv 8 \cdot 9 \equiv 6 \pmod{11}$ (pois $7 \cdot 8 \equiv 1$). Con $k = 11p + 6$:
 $x = 77p + 44 = 11(7p + 4)$, $y = 99p + 55 = 11(9p + 5)$, e ambos son múltiplos de 11.

$$(x; y) = (77p + 44; 99p + 55), \quad p \in \mathbb{Z}.$$

3. a) $9(7n + 4) - 7(9n + 5) = 36 - 35 = 1$; pola identidade de Bézout, $7n + 4$ e $9n + 5$ son primos entre si.

b) $a = 11n(7n + 4)$ e $b = 11n(9n + 5)$. Como $\text{mcd}(7n + 4; 9n + 5) = 1$:

$$\boxed{\text{mcd}(a; b) = 11n}, \quad \boxed{\text{mcm}(a; b) = \frac{ab}{11n} = 11n(7n + 4)(9n + 5)}.$$

4. a) $4^0 \equiv 1$, $4^1 \equiv 4$, $4^2 \equiv 2$, $4^3 \equiv 1 \pmod{7}$. Logo, para $k \in \mathbb{N}$: $4^{3k} \equiv 1$, $4^{3k+1} \equiv 4$, $4^{3k+2} \equiv 2 \pmod{7}$ (período 3).

b) $L = \sum_{j=0}^{2025} 4^j$ ten 2026 termos. Cada bloque de tres termos consecutivos $4^{3k} + 4^{3k+1} + 4^{3k+2} \equiv 1 + 4 + 2 = 7 \equiv 0 \pmod{7}$. Os 2025 primeiros termos ($j = 0, \dots, 2024$) forman 675 bloques, e queda $4^{2025} = 4^{3 \cdot 675} \equiv 1$. Polo tanto $\boxed{L \equiv 1 \pmod{7}}$.

5. $3L \equiv 3 \pmod{7}$. Como $121 \equiv 2$, $7n + 4 \equiv 4$ e $9n + 5 \equiv 2n + 5 \pmod{7}$: $ab = 121n^2(7n + 4)(9n + 5) \equiv 8n^2(2n + 5) \equiv n^2(2n + 5) \pmod{7}$. Hai que resolver $n^2(2n + 5) \equiv -3 \equiv 4 \pmod{7}$:

$n \pmod{7}$	0	1	2	3	4	5	6
$n^2(2n + 5) \pmod{7}$	0	0	1	1	5	4	3

Logo $3L + ab \equiv 0 \pmod{7} \iff \boxed{n = 7p + 5, \quad p \in \mathbb{N}}.$

Exercicio 4. I) 1. a) Para $x \neq -1$, $(\ln|x + 1|)' = \frac{1}{x+1}$, logo

$$g'(x) = 2x + 2 + \frac{2}{x+1} = \frac{2(x+1)^2 + 2}{x+1} = \frac{2[(x+1)^2 + 1]}{x+1}.$$

b) O numerador é positivo, logo g' ten o signo de $x + 1$: g é estritamente decrecente en $] - \infty; -1[$ e estritamente crecente en $] -1; +\infty[$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$ $	$+$
g	$\searrow$	$ $	$\nearrow$

2. a) g é continua e estritamente decrecente en $[-1,8; -1,7] \subset] - \infty; -1[$, con $g(-1,8) = 0,64 + 2 \ln 0,8 \approx 0,19 > 0$ e $g(-1,7) = 0,49 + 2 \ln 0,7 \approx -0,22 < 0$. Polo teorema dos valores intermedios, $g(x) = 0$ ten unha única solución $\alpha \in] -1,8; -1,7[$ ($\alpha \approx -1,753$).

b) $(-2 - \alpha) + 1 = -(\alpha + 1)$, logo $g(-2 - \alpha) = (\alpha + 1)^2 + 2 \ln|\alpha + 1| = g(\alpha) = 0$. Ademais $-2 - \alpha \in] -0,3; -0,2[\subset] -1; +\infty[$, onde g é estritamente crecente, polo que é o único cero alí. Signo:

$$g(x) > 0 \text{ en }] - \infty; \alpha[\cup] -2 - \alpha; +\infty[, \quad g(x) < 0 \text{ en }] \alpha; -1[\cup] -1; -2 - \alpha[, \quad g(\alpha) = g(-2 - \alpha) = 0.$$

II) 1. Con $X = x + 1$, $\lim_{|X| \rightarrow \infty} \frac{1 + \ln|X|}{X} = 0$, logo $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Cando $x \rightarrow -1$, $1 + \ln|x + 1| \rightarrow -\infty$: se $x < -1$, $\frac{1 + \ln|x + 1|}{x + 1} \rightarrow +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$; se $x > -1$, $\frac{1 + \ln|x + 1|}{x + 1} \rightarrow -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$. A recta $x = -1$ é asíntota vertical.

$$2. a) \left(\frac{1 + \ln |x+1|}{x+1} \right)' = \frac{\frac{1}{x+1}(x+1) - (1 + \ln |x+1|)}{(x+1)^2} = \frac{-\ln |x+1|}{(x+1)^2}, \text{ logo}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{2 \ln |x+1|}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 + 2 \ln |x+1|}{(x+1)^2} = \frac{g(x)}{(x+1)^2}.$$

b) f' ten o signo de g : f é crecente en $] -\infty; \alpha]$, decrecente en $[\alpha; -1[$ e en $] -1; -2-\alpha]$, e crecente en $[-2-\alpha; +\infty[$. Usando $\ln |\alpha+1| = -\frac{(\alpha+1)^2}{2}$, $f(\alpha) = 2\alpha+3-\frac{2}{\alpha+1} \approx 2,15$ e $f(-2-\alpha) = 2-f(\alpha) \approx -0,15$.

x	$-\infty$	α	-1	$-2-\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$+$
f	$-\infty \nearrow$	$f(\alpha)$	$-\infty \searrow$	$+\infty \searrow$	$f(-2-\alpha) \nearrow +\infty$

3. a) $f(x) - (x+2) = -2 \frac{1 + \ln |x+1|}{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$, logo $(\Delta): y = x+2$ é asíntota oblicua de (C_f) en $-\infty$ e en $+\infty$. (Posición relativa: (C_f) está por riba de (Δ) cando $1 + \ln |x+1|$ e $x+1$ teñen signos contrarios, isto é, en $] -\infty; -1 - \frac{1}{e}[\cup] -1; -1 + \frac{1}{e}[$; por debaixo en $] -1 - \frac{1}{e}; -1[\cup] -1 + \frac{1}{e}; +\infty[$; e córtaa en $x = -1 \pm \frac{1}{e}$.)

b) Se $x \neq -1$, tamén $-2-x \neq -1$, e $(-2-x)+1 = -(x+1)$, polo que

$$f(-2-x) = -x + \frac{2(1 + \ln |x+1|)}{x+1}, \quad f(-2-x) + f(x) = -x + x + 2 = 2.$$

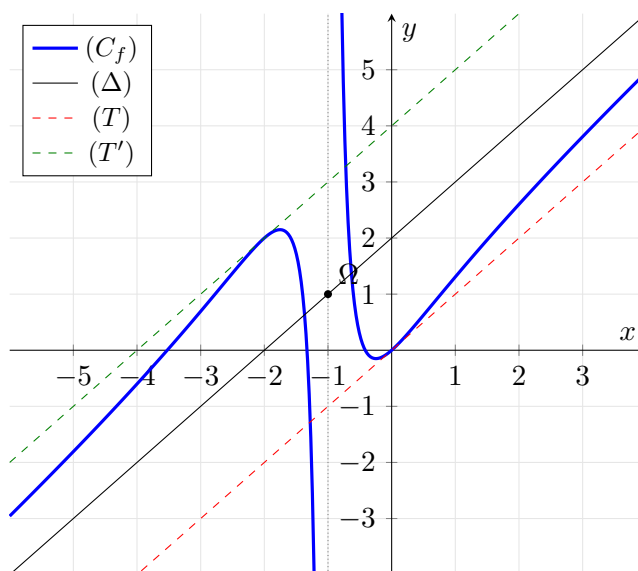
Como o dominio é simétrico respecto de -1 e $\frac{f(-2-x)+f(x)}{2} = 1$, o punto $\boxed{\Omega(-1;1)}$ é centro de simetría de (C_f) .

4. a) Unha tanxente é paralela a (Δ) se e só se $f'(x) = 1 \iff \frac{2 \ln |x+1|}{(x+1)^2} = 0 \iff |x+1| = 1 \iff x \in \{0; -2\}$. Hai pois exactamente dúas tanxentes. Como $f(0) = 2-2=0$ e $f(-2) = 0+2=2$:

$$\boxed{(T): y = x} \quad (\text{en } x = 0), \quad \boxed{(T'): y = x + 4} \quad (\text{en } x = -2).$$

(As dúas son simétricas respecto de Ω .)

b) Gráfica:



c) $f(x) = x+m \iff h(x) = m$, con $h(x) = f(x) - x = 2 - 2\frac{1+\ln|x+1|}{x+1}$ e $h'(x) = f'(x) - 1 = \frac{2\ln|x+1|}{(x+1)^2}$.
 Graficamente, contamos os cortes de (C_f) coa recta $y = x + m$, paralela a (Δ) : en $] -\infty; -1[$, h crece de 2 (sen acadalo) a $h(-2) = 4$ e decrece despois ata $-\infty$; en $] -1; +\infty[$, h decrece de $+\infty$ a $h(0) = 0$ e crece despois cara a 2 (sen acadalo). Daquela: $m < 0$: 1 solución; $m = 0$: 2 (unha delas o punto de tanxencia de (T)); $0 < m < 2$: 3; $m = 2$: 2 (os cortes con (Δ) , $x = -1 \pm \frac{1}{e}$); $2 < m < 4$: 3; $m = 4$: 2 (tanxencia con (T')); $m > 4$: 1.

Exactamente dúas solucións $\iff m \in \{0; 2; 4\}$.

5.

[Nota: Supoñemos que as rectas verticais son $x = 0$ e $x = \lambda$, con $\lambda > 0$, o que é coherente cun resultado que contén $\ln|\lambda + 1|$ e o seu cadrado.]

a) Para $x \geq 0$, $1 + \ln(x+1) > 0$ e $x+1 > 0$, logo $f(x) - (x+2) < 0$: (C_f) está por debaixo de (Δ) . Como $\frac{1+\ln(x+1)}{x+1} = u' + u'u$ con $u = \ln(x+1)$,

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_0^\lambda \frac{2(1 + \ln(x+1))}{x+1} dx = \left[2\ln(x+1) + \ln^2(x+1) \right]_0^\lambda = \boxed{\ln^2|\lambda+1| + 2\ln|\lambda+1| \text{ u.a.}}$$

b) Para un valor dado $k > 0$, con $t = \ln(\lambda+1) > 0$: $t^2 + 2t - k = 0 \iff t = -1 + \sqrt{1+k}$ (a outra raíz é negativa), logo

$$\mathcal{A}(\lambda) = k \iff \lambda = e^{\sqrt{1+k}-1} - 1.$$

Por exemplo, se o valor pedido fose $\mathcal{A}(\lambda) = 3$ u.a., entón $(t-1)(t+3) = 0$, $t = 1$ e $\lambda = e - 1$.

26 Camerún

PISA 2025, matemáticas: non participou

Dificultade relativa estimada: 5/10 (posto 12 dos 25 exames analizados; PAU de Galiza = 5)

Exame: Bacharelato do ensino secundario xeral, series C e E — proba de Matemáticas

Nome orixinal: *Baccalauréat de l'enseignement secondaire général — Épreuve de Mathématiques — Séries C et E*, Office du Baccalauréat du Cameroun (OBC)

Ano e convocatoria: 2025, sesión única de xuño de 2025

Duración: 4 horas **Coeficiente:** 7 (serie C) **Calculadora:** non se indica

Estrutura e cualificación: dúas partes independentes, 20 puntos. Parte A, “avaliación de recursos” (13,25 puntos): catro exercicios (álgebra linear, cónicas e xiros, probabilidade, análise). Parte B, “avaliación de competencias” (6,75 puntos): unha situación problema contextualizada con tres tarefas.

Contexto: O OBC organiza o bacharelato do subsistema francófono de Camerún ao final da *Terminale*. Ese título é o que dá acceso á universidade. A serie C (matemáticas e ciencias físicas) é a de maior nivel matemático. Desde a reforma do enfoque por competencias (APC), a proba inclúe unha parte de “avaliación de competencias” baseada nunha situación da vida real. A duración e o coeficiente proceden do calendario oficial de 2026.

Fonte: https://www.camexams.cm/sujets_bac_cameroun.htm; orixinal: <https://epreuvesetcorriges.com/categories/cameroun/examens/bac/39566-epreuve-d-e-mathematiques-baccalaureat-serie-c-e-session-2025-cameroun>

Instrucións

A proba consta de dúas partes independentes, distribuídas en dúas páxinas.

Parte A: avaliación de recursos (13,25 puntos)

Exercicio 1

(3 puntos)

E é un espazo vectorial sobre $\mathbb{R}$ que ten como base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Sexa f o endomorfismo de E definido por

$$f(\vec{i}) = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}; \quad f(\vec{j}) = 2\vec{i} - \vec{k}; \quad f(\vec{k}) = 2\vec{j} - 5\vec{k}.$$

- 1) Determina a matriz A de f na base $\mathcal{B}$. (0,5 pt)
- 2) Demostra que $\ker f$ é unha recta vectorial e indica unha base dela. (0,5 pt)
- 3) Demostra que $\operatorname{Im} f$ é un plano vectorial e indica unha base del. (0,5 pt)
- 4) Sexa $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ con $\vec{e}_1 = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{e}_2 = -\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ e $\vec{e}_3 = 4\vec{i} - 2\vec{k}$.
 - a) Demostra que $\mathcal{B}'$ é unha base de E . (0,25 pt)
 - b) Demostra que $\vec{e}_1 \in \ker f$ e que $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é unha base de $\operatorname{Im} f$. (0,5 pt)
 - c) Demostra que $f(\vec{e}_2) = -3\vec{e}_2 - \frac{1}{2}\vec{e}_3$ e $f(\vec{e}_3) = -8\vec{e}_2 - \vec{e}_3$. (0,5 pt)
 - d) Deduce a matriz A' de f na base $\mathcal{B}'$. (0,25 pt)

Exercicio 2

(3,25 puntos)

O plano está dotado dun sistema de referencia ortonormal directo (O, I, J) . Considérase o conxunto (Γ) dos puntos $M(x, y)$ do plano tales que

$$x^2 + y^2 + 2xy + \sqrt{2}(x - y) = 0.$$

Sexa r o xiro de centro O e ángulo $-\frac{\pi}{4}$. Sexan $M(x, y)$ un punto do plano e $M'(x', y')$ a súa imaxe por r .

- 1) Expresa x' e y' en función de x e y . (0,5 pt)
- 2) Demostra que $M \in (\Gamma) \iff x'^2 = y'$ e deduce que (Γ) é a imaxe da curva (C) de ecuación $x^2 = y$ por r^{-1} . (—)
- 3) Determina o foco e unha ecuación da directriz de (C) e deduce os de (Γ) . (1 pt)
- 4) Constrúe (C) e (Γ) . (1 pt)

[Nota: Non se indica a puntuación da pregunta 2; polo total do exercicio, serían 0,75 puntos.]

Exercicio 3

(3 puntos)

Unha bolsa contén 4 fichas numeradas, respectivamente, $-1; 0; 0; 1$, todas indistinguíbeis ao tacto. Sácase unha ficha da bolsa, anótase o seu número x e devólvese á bolsa. Sácase unha segunda ficha, anótase o seu número y e devólvese á bolsa. Despois sácase unha terceira ficha, anótase o seu número z e devólvese á bolsa. Todas as fichas teñen a mesma probabilidade de saír. A cada extracción de tres fichas asóciase, no espazo dotado dun sistema de referencia ortonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, o punto M de coordenadas (x, y, z) . Sexa $A(1, -1, -1)$ un punto deste espazo.

- 1) Demostra que a probabilidade de que o punto M estea en A é igual a $\frac{1}{64}$. (0,75 pt)
- 2) Denótase por E_1 o suceso « M pertence ao eixe de abscisas». Demostra que a probabilidade de E_1 é igual a $\frac{1}{4}$. (0,75 pt)
- 3) Sexa (P) o plano que pasa por O e ten vector normal $\vec{n}(1, 1, 1)$.
 - a) Determina unha ecuación cartesiana do plano (P) . (0,5 pt)
 - b) Denótase por E_2 o suceso « M pertence ao plano (P) ». Cal é a probabilidade de E_2 ? (1 pt)

Exercicio 4

(4 puntos)

Sexan α un número real dado e f_α a función definida en $]0; +\infty[$ por

$$f_\alpha(x) = (\alpha - 1) \ln x - \alpha \ln(x + 1).$$

- 1) Demostra que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x) = -\infty$. (0,25 pt)
- 2) Determina, segundo os valores de α , $\lim_{x \rightarrow 0} f_\alpha(x)$. (0,75 pt)
- 3) Estuda o sentido de variación da función f_α . Distinguiranse os casos $\alpha > 1$, $\alpha = 1$ e $\alpha < 1$. (0,75 pt)
- 4) Considérase $f(x) = f_8(x) = 7 \ln x - 8 \ln(x + 1)$ para todo $x \in]0; +\infty[$.
 - a) Calcula $f(7)$ e deduce o signo de f en $]0; +\infty[$. (0,5 pt)
 - b) Determina, mediante unha integración por partes, a primitiva L da función $\ln : x \mapsto \ln x$ que se anula en 1. (0,25 pt)
 - c) Determina, en unidades de área, a área $\mathcal{A}$ da parte do plano delimitada pola curva de f , o eixe de abscisas e as rectas de ecuacións $x = 1$ e $x = 7$. (0,5 pt)

5) Considérase, para $n \geq 1$, $U_n = \sum_{k=1}^n f(k)$.

a) Demuestra que $U_n = -\ln[(n+1)!] - 7\ln(n+1)$. (0,5 pt)

b) Deduce que $U_n \leq -\ln n$ e dá $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$. (0,5 pt)

Parte B: avaliación de competencias (6,75 puntos)

Situación. Nun país que tiña 20 millóns de habitantes, o número de persoas contaxiadas por unha pandemia era de 3000 dous meses despois da aparición da enfermidade e de 12000 casos catro meses despois. Os expertos indicaron que a inmunidade colectiva se acadaba cando está infectado o 60% da poboación. Ademais, os estudos revelan que a velocidade de propagación da enfermidade é proporcional ao número de contaxiados.

Para frear a propagación rápida da enfermidade na súa localidade, o alcalde dunha cidade que xa ten algunhas persoas infectadas decide acondicionar o espazo representado a continuación para illar estes enfermos. Neste espazo, a liña que une J con K é unha porción da curva (Γ) de ecuación $y - (x+1)e^{\frac{1}{12}x} = 0$ no sistema de referencia ortonormal $(O; I; J)$. Recoméndase dispor cada enfermo nun espazo de polo menos 4 m^2 .

Por outra banda, un grupo de investigadores desenvolveu un soro. Cada 12 horas inxéctase 1 cm^2 deste soro no sangue dun enfermo. Despois da eliminación natural, a cantidade de soro que queda (en cm^2) ao cabo dun tempo t (en horas) é $e^{-\frac{1}{36}t}$, máis a suma do que queda das doses anteriores. O soro só é eficaz se o sangue contén en todo momento unha cantidade polo menos igual a 2 cm^2 .

[Nota: Na figura: o sistema de referencia $(O; I; J)$ e a zona limitada pola curva (Γ) entre os puntos J e K .]

Tarefas.

- 1) Determina o número máximo de enfermos que pode acoller o espazo acondicionado polo alcalde. (2,25 pt)
- 2) Determina, nestas condicións, o tempo ao cabo do cal se acadará a inmunidade colectiva, se se despreza o número de nacementos durante ese período. (Denótase por $h(t)$ o número de habitantes deste país contaxiados no instante t , con t en meses.) (2,25 pt)
- 3) Determina o instante a partir do cal o soro será eficaz. (2,25 pt)

Solucións

Exercicio 1. 1) As columnas de A son as coordenadas de $f(\vec{i})$, $f(\vec{j})$, $f(\vec{k})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$2) \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \in \ker f \iff \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -x + 2z = 0 \\ 2x - y - 5z = 0 \end{cases} \iff x = -2y, z = -y \text{ (a terceira ecuación}$$

cúmrese entón: $-4y - y + 5y = 0$). Logo $\ker f = \{y(-2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) \mid y \in \mathbb{R}\}$ é unha recta vectorial, de base $\boxed{(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})}$.

3) Polo teorema do rango, $\dim \operatorname{Im} f = 3 - 1 = 2$: $\operatorname{Im} f$ é un plano vectorial. Unha base é $\boxed{(f(\vec{i}), f(\vec{j})) = (\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{k})}$ (dous vectores non colineais de $\operatorname{Im} f$). Unha ecuación é $x + 5y + 2z = 0$ (vector normal $f(\vec{i}) \wedge f(\vec{j}) = (1, 5, 2)$; tamén $f(\vec{k}) = (0, 2, -5)$ a verifica).

4-a) $\det_{\mathcal{B}}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, logo $\mathcal{B}'$ é unha base de E .

b) $\vec{e}_1 = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ é o vector de base de $\ker f$ achado en 2): $A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\vec{e}_2 = (-1, 1, -2)$ e $\vec{e}_3 = (4, 0, -2)$ cumpren $x + 5y + 2z = 0$ ($-1 + 5 - 4 = 0$, $4 + 0 - 2 = 0$), logo están en $\operatorname{Im} f$; non son colineais e $\dim \operatorname{Im} f = 2$, así que $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é unha base de $\operatorname{Im} f$.

c) $f(\vec{e}_2) = A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ e $-3\vec{e}_2 - \frac{1}{2}\vec{e}_3 = (3, -3, 6) + (-2, 0, 1) = (1, -3, 7)$. ✓

$f(\vec{e}_3) = A \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 18 \end{pmatrix}$ e $-8\vec{e}_2 - \vec{e}_3 = (8, -8, 16) + (-4, 0, 2) = (4, -8, 18)$. ✓

d) Como $f(\vec{e}_1) = \vec{0}$:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -8 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercicio 2. 1) A expresión complexa de r é $z' = e^{-i\pi/4}z = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)(x+iy)$, logo

$$\boxed{x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y), \quad y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(y-x)}.$$

2) $x'^2 = \frac{1}{2}(x+y)^2$ e $y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(y-x)$, así que

$$x'^2 = y' \iff (x+y)^2 = \sqrt{2}(y-x) \iff x^2 + y^2 + 2xy + \sqrt{2}(x-y) = 0 \iff M \in (\Gamma).$$

Polo tanto $M \in (\Gamma) \iff r(M) \in (C) \iff M \in r^{-1}((C))$: $(\Gamma) = r^{-1}(C)$, onde r^{-1} é o xiro de centro O e ángulo $\frac{\pi}{4}$.

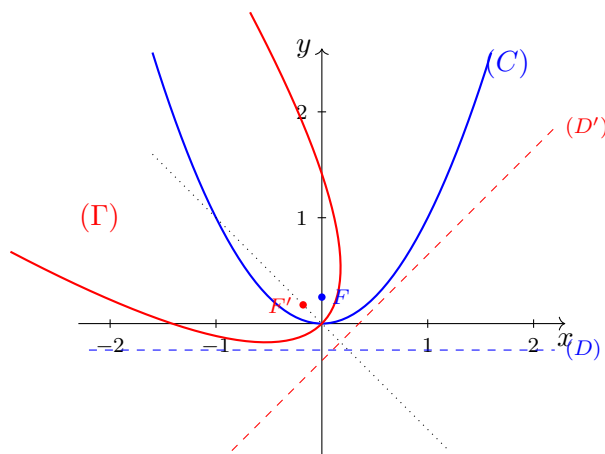
3) $(C) : x^2 = y = 2 \cdot \frac{1}{4}y$ é unha parábola de parámetro $p = \frac{1}{2}$, vértice O e eixe (Oy) : foco $\boxed{F(0, \frac{1}{4})}$ e directriz $\boxed{(D) : y = -\frac{1}{4}}$. Como os xiros conservan as distancias, (Γ) é a parábola de foco $F' = r^{-1}(F)$ e directriz $(D') = r^{-1}(D)$:

- $z_{F'} = e^{i\pi/4} \cdot \frac{i}{4} = \frac{\sqrt{2}}{8}(-1+i)$: $\boxed{F'(-\frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{2}}{8})}$;

- $M \in (D') \iff r(M) \in (D) \iff y' = -\frac{1}{4} \iff \frac{\sqrt{2}}{2}(y-x) = -\frac{1}{4}$: $\boxed{(D') : x - y - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0}$.

O vértice de (Γ) é O e o seu eixe é a recta $x + y = 0$ (imaxe de $x = 0$).

4) (Γ) obtense xirando (C) un ángulo $\frac{\pi}{4}$ arredor de O :



Exercicio 3. Cada extracción é independente das demais e $P(-1) = \frac{1}{4}$, $P(0) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $P(1) = \frac{1}{4}$. Hai $4^3 = 64$ resultados equiprobábeis (fichas distinguidas).

1) $M = A \iff x = 1, y = -1, z = -1$: $P = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{64}}$.

2) $M \in (Ox) \iff y = 0 \text{ e } z = 0$ (x calquera): $P(E_1) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{4}}$.

3-a) Plano por O con vector normal $(1, 1, 1)$: $\boxed{(P) : x + y + z = 0}$.

b) $x + y + z = 0$ con $x, y, z \in \{-1, 0, 1\}$ dá dous tipos de ternas:

- $(0, 0, 0)$: probabilidade $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = \frac{8}{64}$;
- unha permutación de $(-1, 0, 1)$: $3! = 6$ ternas, cada unha con probabilidade $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$, total $\frac{12}{64}$.

$$P(E_2) = \frac{8+12}{64} = \boxed{\frac{5}{16}}.$$

Exercicio 4. 1) $f_\alpha(x) = \alpha(\ln x - \ln(x+1)) - \ln x = \alpha \ln \frac{x}{x+1} - \ln x$. Cando $x \rightarrow +\infty$, $\frac{x}{x+1} \rightarrow 1$, logo $\alpha \ln \frac{x}{x+1} \rightarrow 0$, e $-\ln x \rightarrow -\infty$: $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x) = -\infty}$.

2) Cando $x \rightarrow 0^+$, $\alpha \ln(x+1) \rightarrow 0$ e $\ln x \rightarrow -\infty$, logo $\lim_{x \rightarrow 0} f_\alpha(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (\alpha - 1) \ln x$:

$$\boxed{\alpha > 1 : -\infty; \quad \alpha = 1 : 0; \quad \alpha < 1 : +\infty.}$$

3) $f'_\alpha(x) = \frac{\alpha-1}{x} - \frac{\alpha}{x+1} = \frac{(\alpha-1)(x+1) - \alpha x}{x(x+1)} = \frac{\alpha-1-x}{x(x+1)}$, co signo de $\alpha-1-x$.

- $\alpha > 1$: f_α é crecente en $]0, \alpha-1]$ e decrecente en $[\alpha-1, +\infty[$ (máximo en $x = \alpha-1$).
- $\alpha = 1$: $f'_1(x) = \frac{-1}{x+1} < 0$; f_1 é decrecente en $]0, +\infty[$.
- $\alpha < 1$: $\alpha-1-x < 0$; f_α é decrecente en $]0, +\infty[$.

4-a) $f(7) = 7 \ln 7 - 8 \ln 8 = 7 \ln 7 - 24 \ln 2 \approx -3,01 < 0$ (equivalentemente, $7^7 < 8^8$). Como $\alpha = 8 > 1$, f alcanza o seu máximo en $x = \alpha - 1 = 7$, logo $f(x) \leq f(7) < 0$: **f é negativa en $]0, +\infty[$.**

b) Por partes ($u = \ln x$, $v' = 1$): $\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - x + C$. Con $L(1) = 0$, $C = 1$: $\boxed{L(x) = x \ln x - x + 1}$.

c) Como $f < 0$, $\mathcal{A} = \int_1^7 (-f(x)) dx = 8 \int_1^7 \ln(x+1) dx - 7 \int_1^7 \ln x dx$, con

$$\int_1^7 \ln(x+1) dx = \int_2^8 \ln u du = L(8) - L(2) = (24 \ln 2 - 7) - (2 \ln 2 - 1) = 22 \ln 2 - 6,$$

$$\int_1^7 \ln x dx = L(7) = 7 \ln 7 - 6.$$

Logo

$$\mathcal{A} = 176 \ln 2 - 48 - 49 \ln 7 + 42 = \boxed{176 \ln 2 - 49 \ln 7 - 6 \approx 20,64 \text{ u.a.}}$$

5-a) $U_n = 7 \sum_{k=1}^n \ln k - 8 \sum_{k=1}^n \ln(k+1) = 7 \ln(n!) - 8 \ln((n+1)!)$. Como $\ln(n!) = \ln((n+1)!) - \ln(n+1)$:

$$U_n = 7 \ln((n+1)!) - 7 \ln(n+1) - 8 \ln((n+1)!) = \boxed{-\ln[(n+1)!] - 7 \ln(n+1)}.$$

b) $(n+1)! \geq n+1 > n$, logo $-\ln[(n+1)!] \leq -\ln n$; e $-7 \ln(n+1) \leq 0$. Así $\boxed{U_n \leq -\ln n}$ e, como $-\ln n \rightarrow -\infty$, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty}$.

Parte B. Tarefa 1.

[Nota: Supoñemos que o espazo é a rexión limitada polos eixes, a curva (Γ) entre $J(0,1)$ e K , e a vertical de K , con K de abscisa 12 (o valor natural, dado o expoñente $\frac{x}{12}$) e unidade gráfica de 1 m. O método vale para calquera outro dato.]

O espazo ten área $\mathcal{S}(a) = \int_0^a (x+1)e^{x/12} dx$, sendo a a abscisa de K . Por partes ($u = x+1$, $v' = e^{x/12}$, $v = 12e^{x/12}$):

$$\int (x+1)e^{x/12} dx = 12(x+1)e^{x/12} - 144e^{x/12} = 12(x-11)e^{x/12},$$

$$\mathcal{S}(a) = 12(a-11)e^{a/12} + 132.$$

Con $a = 12$: $\mathcal{S} = 12e + 132 \approx 164,62 \text{ m}^2$. Con polo menos 4 m^2 por enfermo, $\frac{164,62}{4} \approx 41,15$, así que o número máximo de enfermos é $\boxed{41}$.

Tarefa 2. A velocidade de propagación é proporcional ao número de contaxiados: $h'(t) = k h(t)$, logo $h(t) = h_0 e^{kt}$. De $h(2) = 3000$ e $h(4) = 12000$: $e^{2k} = 4$, $k = \ln 2$, e $h_0 = 3000/4 = 750$. Así $h(t) = 750 \cdot 2^t$. A inmunidade colectiva acádase con $0,6 \cdot 20\,000\,000 = 12\,000\,000$ contaxiados:

$$750 \cdot 2^t = 12\,000\,000 \iff 2^t = 16\,000 \iff t = \frac{\ln 16\,000}{\ln 2} \approx 13,97.$$

A inmunidade colectiva acádase ao cabo de $\boxed{t \approx 14 \text{ meses}}$ desde a aparición da enfermidade.

Tarefa 3. Supoñemos que a primeira inxección se pon en $t = 0$ e que as seguintes se poñen en $t = 12, 24, \dots$. Sexa $q = e^{-12/36} = e^{-1/3} \approx 0,7165$. Entre a n -ésima inxección e a seguinte, a cantidade de soro decrece, así que o seu mínimo é o valor xusto antes da inxección $n+1$:

$$S_n = q + q^2 + \dots + q^n = q \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

(S_n) é crecente e tende a $\frac{q}{1-q} = \frac{1}{e^{1/3}-1} \approx 2,53 > 2$, logo o soro acaba sendo eficaz. A condición «sempre ≥ 2 » a partir da inxección n equivale a $S_n \geq 2$:

$$q^n \leq 1 - \frac{2(1-q)}{q} = 3 - 2e^{1/3} \iff n \geq -3 \ln(3 - 2e^{1/3}) \approx 4,70 \iff n \geq 5.$$

Comprobación: $S_4 \approx 1,861 < 2$ e $S_5 \approx 2,050 \geq 2$. Polo tanto o soro é eficaz de xeito permanente a partir da 5.^a inxección, é dicir, a partir do instante $\boxed{t = 48 \text{ h}}$ (dous días despois da primeira dose). (Entre as 24 e as 48 horas a cantidade xa chega a superar 2 despois de cada inxección, pero volve baixar de 2 antes da seguinte.)

Matemáticas para entrar na universidade

Existirá algunha correlación entre os resultados en matemáticas do informe PISA e a dificultade das probas de acceso á universidade nos distintos países? No lugar de conxecturar, este libro reúne exames reais de matemáticas de acceso á universidade de 26 países e de dúas comunidades autónomas (Andalucía e Catalunya), ordenados segundo a súa puntuación en matemáticas en PISA 2025. Cada exame preséntase traducido ao galego, coa súa ficha, a ligazón ao orixinal e a resolución completa de todos os exercicios, e cunha estimación da súa dificultade relativa tomando como referencia a PAU de Matemáticas II de Galiza.

Iván Area Carracedo é catedrático de universidade de Matemática Aplicada na Escola de Enxeñaría Aeronáutica e do Espazo da Universidade de Vigo, no campus de Ourense. É investigador do IFCAE e ten publicado máis de 130 artigos en revistas internacionais de recoñecido prestixio e dirixido seis teses de doutoramento. É membro do grupo de innovación docente IADA. Foi secretario xeral do CIMPA entre 2016 e 2020, vicerreitor de Relacións Institucionais da Universidade de Vigo entre 2006 e 2010, director de Avaliación de Profesorado da ANECA en 2020 e delegado do reitor na Comisión Interuniversitaria de Galiza ata xuño deste mesmo ano 2026. Recibiu distintos premios polo seu labor docente. En *O Peripato* (area.webs.uvigo.gal/o-peripato) publica reflexións sobre pedagogía, avaliación, universidade, ciencia e sociedade.

